VERICA TOMAŠEVIĆ

SLOBODANKA MIJATOVIĆ

ZBIRKA

RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKIM FAKULTETIMA

univerzitetska knjiga

Veselin Masleša

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE SA KVALIFIKACIONIH ISPITA

VERICA TOMAŠEVIĆ — SLOBODANKA MIJATOVIĆ

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKIM FAKULTETIMA

BIBLIOTEKA
UNIVERZITETSKIH UDŽBENIKA I PRIRUČNIKA

Glavni urednik
Mr RAJKO KULJIĆ

Odgovorni urednik
MILENKO RADMILOVIĆ

VERICA TOMAŠEVIĆ — SLOBODANKA MIJATOVIĆ

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKIM FAKULTETIMA

Veselin Masleša

PREDGOVOR

Zbirka zadataka namijenjena je učenicima završnih razreda srednjeg usmjerenog obrazovanja (III i IV stepena) koji se pripremaju za studij na mašinskom ili na nekom srodnom fakultetu.

Knjiga se sastoji od šest dijelova. U prvom dijelu dat je kratak pregled teorije. Zatim slijede riješeni zadaci sa kvalifikacionih ispita održanih 1983. godine na Mašinskim fakultetima u Sarajevu (II dio), Banjaluci (III) dio), Mostaru (IV dio) i Zenici (V dio). Poslednji (VI dio) sadrži zadatke za vježbu.

Teoretski dio dat je ukratko, kao podsjetnik na neke oblasti iz elementarne matematike kojim srednjoškolci moraju ovladati prije upisa na neki od pomenutih fakulteta. Tu su obuhvaćeni svi oni dijelovi srednjoškolskog gradiva koji su bili zastupljeni kroz zadatke na održanim kvalifikacionim ispitima.

Skoro svi zadaci u drugom, trećem, četvrtom i petom dijelu su riješeni· U šestom dijelu riješen je samo izvjestan broj zadataka, dok su za ostale zadatke data uputstva (tamo gdje je to bilo potrebno) i konačan rezultat.

Zadaci sa kvalifikacionih ispita održanih 1982. godine nisu uključeni u ovu zbirku. Osnovni razlog za to je činjenica da te godine programi kvalifikacionih ispita na fakultetima nisu bili usklađeni sa programom zajedničkih osnova srednjeg usmjerenog obrazovanja i vaspitanja.

Na do sada održanim kvalifikacionim ispitima kandidati su pokazali veoma loše rezultate. To je bio i osnovni razlog za objavljivanje ovakve jedne zbirke riješenih zadataka. Iz istog razloga u knjizi je riješen i jedan broj vrlo jednostavnih zadataka.

Nadamo se da će zbirka korisno poslužiti srednjoškolcima u njihovim pripremama za studij na mašinskom ili na nekom drugom srodnom fakultetu.

Na kraju se želimo zahvaliti svima onima koji su na bilo koji način doprinijeli objavljivanju ove knjige. Posebnu zahvalnost dugujemo profesoru dr Milošu Tomiću i docent dr Mirjani Malenici na stručnoj pomoći, korisnim primjedbama i prijedlozima.

Takođe se želimo zahvaliti i kolegama sa Mašinskih fakulteta u Banjaluci, Mostaru i Zenici koji su omogućili da u knjigu uvrstimo i zadatke sa kvalifikacionih ispita održanih na tim fakultetima.

Autori

I DIO

KRATAK PREGLED TEORIJE

1. ARITMETIKA I ALGEBRA

1.1. OPERACIJE SA STEPENIMA I KORIJENIMA

a) **Stepeni sa cijelim eksponentom**

Izraz $a^n = \underbrace{a \ldots a}_{n \text{ puta}}$ $(a \in R,\ n \in N)$ u kome se a javlja n puta kao faktor zovemo *n-tim stepenom* broja a. Broj a zovemo osnovom (bazom), a n izložiocem (eksponentom) toga stepena. (Pri tome smo sa R, odnosno sa N označili skup realnih, odnosno skup prirodnih brojeva).

Za operacije sa stepenima vrijede slijedeće jednakosti:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
1)\ a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \\
2)\ a^m : a^n = a^{m-n} & (a \neq 0,\ m > n) \\
3)\ (a^m)^n = a^{m \cdot n} & \\
4)\ (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n & \\
5)\ (a : b)^n = a^n : b^n & (b \neq 0).
\end{array}
\right\} \qquad (1)
$$

Osim toga, po definiciji se uzima da je

$$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$$

$$a^{-n} = 1 : a^n \quad (a \neq 0,\ n \in N).$$

Jednakosti (1) vrijede i u slučaju kada su $m, n \in Z$ (gdje smo sa Z označili skup cijelih brojeva).

b) **Aritmetički korijen**

Za svaki realan broj $a \geqslant 0$ i svaki prirodan broj n postoji tačno jedan broj $b \geqslant 0$ takav da je

$$b^n = a.$$

Taj broj b zovemo *n-tim aritmetičkim korijenom* broja a i označavamo sa

$$b = \sqrt[n]{a}.$$

Broj a zovemo podkorjenom veličinom (radikandom), a broj n izložiocem (eksponentom) korijena.

Za operacije sa aritmetičkim korijenom vrijede slijedeće jednakosti:

$$
\left.\begin{aligned}
&1)\ \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} && (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)\\
&2)\ \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b} && (a\geqslant 0,\ b>0)\\
&3)\ \sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p} && (a\geqslant 0,\ p\in N)\\
&4)\ (\sqrt[n]{a})^p=\sqrt[n]{a^p} && (a\geqslant 0,\ p\in N)\\
&5)\ \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a} && (a\geqslant 0).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)
$$

Izraz $\sqrt[2k]{a}\,(k\in N)$ za $a<0$ nije definisan u skupu realnih brojeva, dok se $\sqrt[2k-1]{a}\,(k\in N)$ negativnog broja a definiše slijedećom jednakošću:

$$\sqrt[2k-1]{a}=-\sqrt[2k-1]{|a|} \qquad (a<0,\ k\in N).$$

U slučaju $a<0,\ b<0$:

(i) za $n=2k\ (k\in N)$ jednakosti (2) ne vrijede;

(ii) za $n=2k-1,\ p=2l\ (k,l\in N)$ u (2) ne vrijede jednakosti 3) i 5). U ovom slučaju umjesto jednakosti 3) primjenjuje se opštija jednakost:

$$\sqrt[p]{a^{np}}=|a|^n \qquad (a\in R)$$

(iii) za $n=2k-1,\ p=2l-1\ (k,l\in N)$ sve jednakosti u (2) vrijede.

c) **Stepeni sa racionalnim eksponentom**

Stepen $a^{\frac{m}{n}};\ a\geqslant 0\ (m,\ n\in N)$ definišemo slijedećom jednakošću:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

Za ovako definisane stepene vrijede jednakosti (1).

1.2. FORMULE ZA SKRAĆENO MNOŽENJE

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	(Kvadrat zbira)
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	(Kvadrat razlike)
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	(Kub zbira)
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	(Kub razlike)
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	(Razlika kvadrata)
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	(Zbir kubova)
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	(Razlika kubova)

1.3. KVADRATNA JEDNAČINA. KVADRATNA FUNKCIJA. KVADRATNE NEJEDNAČINE.

a) Kvadratna jednačina

Jednačina

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \in R,\ a, b, c \neq 0) \qquad \text{(J)}$$

naziva se *opšta kvadratna jednačina* sa jednom nepoznatom.

Rješenja te jednačine su:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

i vrijedi

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{(Vijetova pravila),}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

U slučaju kada je $b^2 - 4ac < 0$, jednačina (J) nema rješenja u skupu R.

b) Kvadratna funkcija

Formula $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in R,\ a \neq 0)$ definiše *kvadratnu funkciju* f sa R u R. Grafik te funkcije je parabola.

Kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ možemo pisati u obliku

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

odakle, neposredno, zaključujemo da tjeme parabole ima koordinate

$$x = -\frac{b}{2a}, \qquad y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Izraz $b^2 - 4ac$ nazivamo diskriminantom kvadratne funkcije i označavamo ga sa D, tj.

$$D = b^2 - 4ac.$$

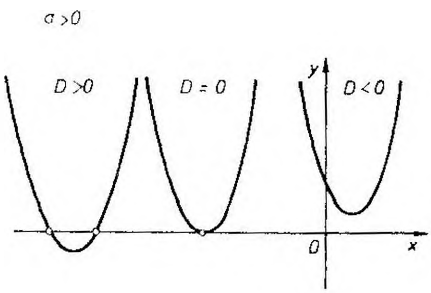
U slučaju kada je $a > 0$ kvadratna funkcija ima minimum; u slučaju kada je $a < 0$ funkcija ima maksimum.

Ako je $D > 0$, grafik kvadratne funkcije siječe x osu u dvjema različitim tačkama.

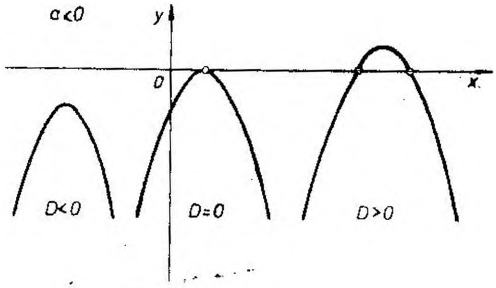
Ako je $D = 0$, grafik dodiruje x osu.

Ako je $D < 0$, grafik nema zajedničkih tačaka sa x osom.

(Vidi slike 1. i 2.)



Sl. 1.



Sl. 2.

c) **Kvadratne nejednačine**

Nejednačina oblika

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{ili} \qquad ax^2 + bx + c < 0,$$

gdje su $a, b, c \in R$ i $a \neq 0$, zove se *kvadratna nejednačina* sa jednom nepoznatom.

Riješiti kvadratnu nejednačinu $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) znači naći skup svih realnih brojeva x za koje kvadratna funkcija $y = ax^2 + bx + c$ prima pozitivne (negativne) vrijednosti.

1.4. EKSPONENCIJALNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

Eksponencijalnom jednačinom (*nejednačinom*) nazivamo jednačinu (nejednačinu) kod koje se nepoznata nalazi u eksponentu.

a) **Eksponencijalne jednačine**

Eksponencijalne jednačine koje ćemo rješavati mogu se svesti na jedan od slijedeća tri osnovna oblika

(i) $a^{f(x)} = a^c \qquad (0 < a \neq 1)$.

Rješenja ove jednačine se dobiju rješavanjem jednačine

$f(x) = c.$

(ii) $a^{f(x)} = b \qquad (0 < a \neq 1, \quad b > 0)$.

Ova jednačina se rješava logaritmiranjem.

(iii) $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0 \qquad (0 < a \neq 1, \quad A, B, C \in R)$.

Smjenom $a^x = t$, ova jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu

$$At^2 + Bt + C = 0.$$

Dalje se rješavanje svodi na slučaj (ii).

b) **Eksponencijalne nejednačine**

Da bismo riješili eksponencijalnu nejednačinu, nastojimo je svesti na oblik

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \qquad (0 < a \neq 1) \qquad \text{(N)}$$

Nejednačina (N) ekvivalentna je za $a > 1$ nejednačini

$$f(x) < g(x) \qquad (\text{N}_1),$$

odnosno, za $0 < a < 1$ nejednačinu

$$f(x) > g(x). \qquad (\text{N}_2)$$

Zbog toga, kada riješimo nejednačinu (N_1), odnosno (N_2), riješili smo i datu nejednačinu (N).

1.5. PRAVILA ZA LOGARITME. LOGARITAMSKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

a) **Pravila za logaritme**

Logaritam pozitivnog broja x za bazu a $(0 < a \neq 1)$ je broj y kojim treba stepenovati bazu a da bi se dobio broj x. Broj y označava se sa

$$y = \log_a x.$$

Dakle, $y = \log_a x$ ako i samo ako je $x = a^y$.

Broj x naziva se numerus (logaritmand).

Iz pravila za stepene neposredno slijede sljedeća pravila za logaritme:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & \log_c ab = \log_c a + \log_c b & (a, b > 0,\ 0 < c \neq 1) \\ 2) & \log_c (a:b) = \log_c a - \log_c b & (a, b > 0,\ 0 < c \neq 1) \\ 3) & \log_c a^p = p \log_c a & (a, b > 0,\ 0 < c \neq 1,\ p \in R) \end{array}\right\} \quad (1)$$

Kako lijeve strane u (1) imaju smisla i za $a, b < 0$ i p paran broj ili razlomak čiji je brojnik paran broj, to u ovom slučaju umjesto (1) možemo pisati

$$\left.\begin{array}{ll} 1') & \log_c ab = \log_c |a| + \log_c |b| \\ 2') & \log_c (a:b) = \log_c |a| - \log_c |b| \qquad (a \cdot b > 0) \\ 3') & \log_c a^{2k} = 2k \log_c |a| \end{array}\right\} \quad (1')$$

b) **Logaritamske jednačine (nejednačine)**

Logaritamskom jednačinom (nejednačinom) nazivamo jednačinu (nejednačinu) kod koje se nepoznata javlja u numerusu logaritma.

Pri rješavanju ovih jednačina (nejednačina) treba postupiti na sljedeći način:

i) Naći definiciono područje D jednačine (nejednačine). (D je skup svih vrijednosti argumenta za koje su svi numerusi pozitivni).

ii) Logaritamsku jednačinu nastojimo primjenom pravila (I), odnosno (I'), svesti u njenom definicionom području na ekvivalentnu jednačinu:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \qquad (0 < a \neq 1). \qquad (J)$$

Jednačina (J) ekvivalentna je u deficionom području D jednačini

$$f(x) = g(x). \qquad (J_1)$$

Jednačinu (J_1) ćemo riješiti i svako njeno rješenje biće rješenje date jednačine (J) ako je iz deficionog područja D.

Logaritamsku nejednačinu, primjenom pravila (I), odnosno (I'), svodimo na nejednačinu oblika:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \qquad (0 < a \neq 1). \qquad (N)$$

Nejednačina (N) je za $a > 1$ ekvivalentna u D nejednačini

$$f(x) < g(x), \qquad (N_1)$$

a za $0 < a < 1$ nejednačini

$$f(x) > g(x). \qquad (N_2)$$

Zato treba riješiti nejednačinu (N_1), odnosno (N_2), pa uzeti samo ona njena rješenja koja pripadaju skupu D. Ta rješenja biće rješenja date logaritamske nejednačine.

2. PLANIMETRIJA I STEREOMETRIJA

2.1. PLANIMETRIJA

a) Trougao

Zbir uglova trougla je

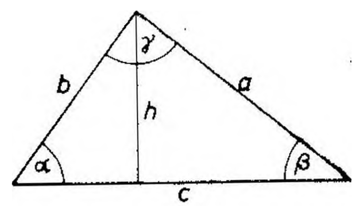
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Obim O trougla dat je formulom

$$O = a + b + c.$$

Površina P trougla data je formulom

$$P = \frac{a \cdot h}{2}.$$



Sl. 3.

(a, b, c su dužine stranica trougla, h je dužina visine trougla).

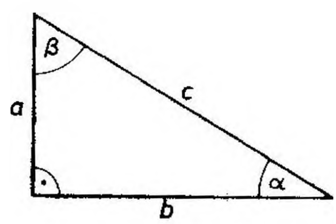
a₁) *Pravougli trougao*

Pitagorina teorema:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Površina P pravouglog trougla data je formulom

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$



Sl. 4.

(a, b su dužine katete, c je dužina hipotenuze)

a₂) *Jednakostraničan trougao*

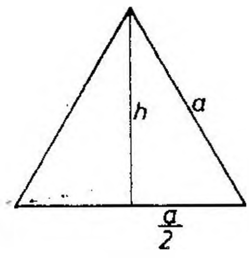
Visina h jednakostraničnog trougla data je formulom

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Površina P jednakostraničnog trougla data je formulom

$$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

(a je dužina stranice).



Sl. 5.

b) **Pravougaonik**

Obim O pravougaonika dat je formulom

$$O = 2(a + b).$$

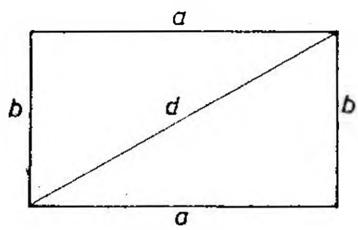
Dijagonala d pravougaonika data je formulom

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Površina P pravougaonika data je formulom

$$P = a \cdot b.$$

(a, b su dužine stranica pravougaonika).



Sl. 6.

c) **Kvadrat**

Obim O kvadrata dat je formulom

$$O = 4a.$$

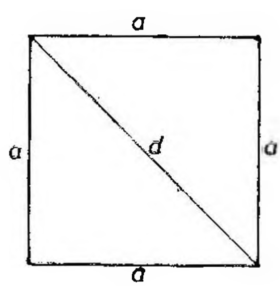
Dijagonala d kvadrata data je formulom

$$d = a\sqrt{2}.$$

Površina P kvadrata data je formulom

$$P = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

(a je dužina stranice kvadrata).



Sl. 7.

d) **Romboid**

Obim O romboida dat je formulom

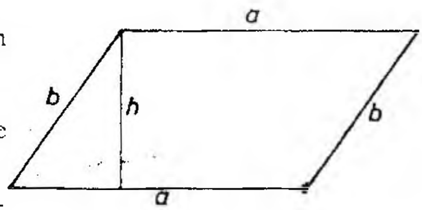
$$O = 2(a + b).$$

Površina P romboida data je formulom

$$P = a \cdot h.$$

(a, b su dužine stranica, h je dužina visine romboida).

Napomena: Dijagonale romboida se polove.



Sl. 8.

e) **Romb**

Obim O romba dat je formulom

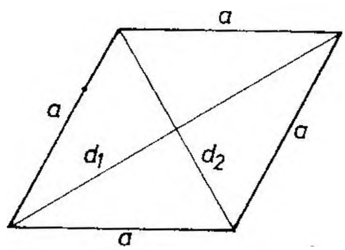
$$O = 4a.$$

Površina P romba data je formulom

$$P = a \cdot h = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

(a je dužina stranice, h dužina visine, a d_1 i d_2 su dužine dijagonala romba).

Napomena: Dijagonale romba se polove i okomite su.



Sl. 9.

f) **Jednakokraki trapez**

Obim O jednakokrakog trapeza dat je formulom

$$O = a + 2b + c.$$

Površina P jednakokrakog trapeza data je formulom

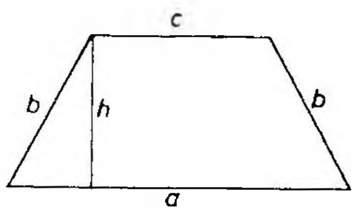
$$P = m \cdot h,$$

gdje je

$$m = \frac{a + c}{2}$$

srednja linija trapeza.

(a, c su dužine osnovica, h je dužina visine trapeza).



Sl. 10.

e) **Krug**

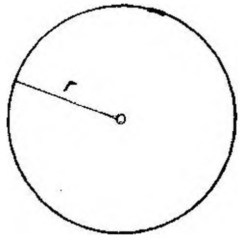
Obim O kruga dat je formulom

$$O = 2 r\pi.$$

Površina P kruga data je formulom

$$P = r^2\pi.$$

(r je dužina poluprečnika kruga).



Sl. 11.

2.2. STEREOMETRIJA

a) **Prizma**

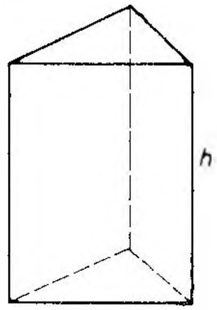
Površina P prizme data je formulom

$$P = 2\,B + M.$$

Volumen V prizme dat je formulom

$$V = B \cdot h.$$

(B je površina baze, M površina omotača, a h dužina visine prizme).



Sl. 12.

a_1) *Kocka*

Dijagonala d kocke data je formulom

$$d = a\sqrt{3}.$$

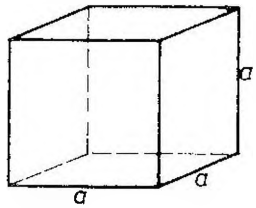
Površina P kocke data je formulom

$$P = 6\,a^2.$$

Volumen V kocke dat je formulom

$$V = a^3.$$

(a je dužina ivice kocke).



Sl. 13.

a_2) *Kvadar* (*pravougli paralelepiped*)

Dijagonala d kvadra data je formulom

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

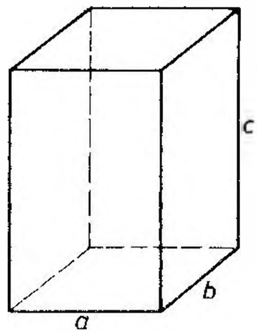
Površina P kvadra data je formulom

$$P = 2\,(ab + ac + bc).$$

Volumen V kvadra dat je formulom

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

(a, b, c dužine ivica kvadra).



Sl. 14.

b) **Piramida**

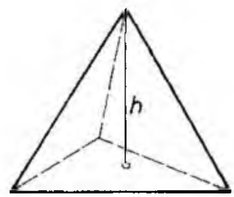
Površina P piramide data je formulom

$$P = B + M.$$

Volumen V piramide dat je formulom

$$V = \frac{B \cdot h}{3}.$$

(B je površina baze, M površina omotača, a h dužina visine piramide).



Sl. 15.

c) **Valjak**

Površina M omotača valjka data je formulom

$$M = 2\, r\, \pi\, h.$$

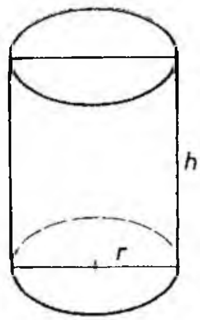
Površina P valjka data je formulom

$$P = 2B + M = 2r\,\pi\,(r + h).$$

Volumen V valjka dat je formulom

$$V = r^2\,\pi \cdot h.$$

(r je dužina poluprečnika baze, a h je dužina visine valjka).



Sl. 16.

d) **Kupa** (**konus**)

Površina M omotača kupe data je formulom

$$M = r\pi\, s.$$

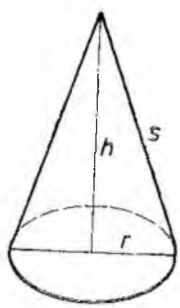
Površina P kupe data je formulom

$$P = B + M = r\pi\,(r + s).$$

Volumen V kupe dat je formulom

$$V = \frac{r^2\,\pi\, h}{3}.$$

(r je dužina poluprečnika baze, s je dužina izvodnice, a h dužina visine kupe).



Sl. 17.

e) **Lopta**

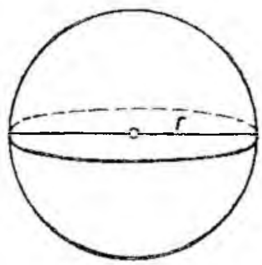
Površina P lopte data je formulom

$$P = 4\, r^2 \pi.$$

Volumen V lopte dat je formulom

$$V = \frac{4}{3}\, r^3\, \pi.$$

(r je dužina poluprečnika lopte).



Sl. 18.

3. TRIGONOMETRIJA

3.1. MJERENJE UGLOVA

Za mjerenje uglova najviše se koriste slijedeće dvije jedinice:

1. ugao od jednog stepena
2. ugao od jednog radijana

1. Tristošezdeseti dio punog ugla naziva se *ugao od jednog stepena.*

2. Centralni ugao kome je odgovarajući luk jednak radijusu kružnice naziva se *ugao od jednog radijana.*

(Ubuduće ćemo umjesto „ugao od α radijana" ili „ugao od α stepeni" govoriti kraće „ugao α".)

Preračunavanje radijana u stepene i stepena u radijane vrši se po formulama:

$$t \text{ rad} = \frac{180}{\pi} t^\circ,$$

odnosno

$$t^\circ = \frac{\pi}{180} t \text{ rad}.$$

Potrebno je za neke često korištene uglove, čija je mjera zadana u stepenima, znati njihovu mjeru u radijanima i obrnuto. Zato nam služi slijedeća tabela:

Stepeni	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radijani	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

3.2. TRIGONOMETRIJSKA KRUŽNICA. OPŠTA DEFINICIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA.

Kružnicu u koordinatnoj ravni, sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom $r = 1$, nazivamo *trigonometrijskom kružnicom.*

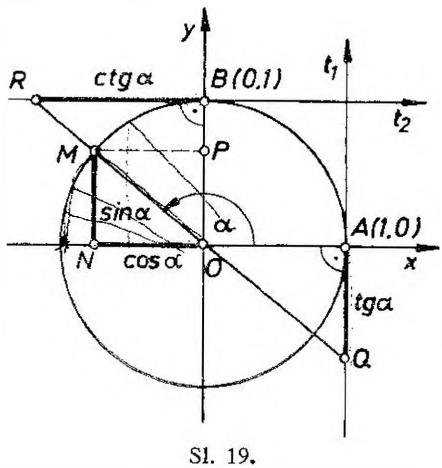
Posmatraćemo uglove sa vrhom u koordinatnom početku čiji je prvi krak poluprava Ox.

Funkciju koja svakom realnom broju α dodjeljuje broj jednak ordinati tačke u kojoj drugi krak ugla α siječe trigonometrijsku kružnicu nazivamo *sinus* i označavamo sa sin, tj.

$$\sin\alpha = \overline{NM}\ (= \overline{OP})\ \text{(Sl. 19.)}$$

Funkciju koja svakom realnom broju α dodjeljuje broj jednak apscisi tačke u kojoj drugi krak ugla α siječe trigonometrijsku kružnicu nazivamo *kosinus* i označavamo sa cos, tj.

$$\cos\alpha = \overline{ON}\ (= \overline{PM})\ \text{(Sl. 19.)}$$



Sl. 19.

Tangens realnog broja je omjer sinusa i kosinusa, a *kotangens* je omjer kosinusa i sinusa toga broja:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Iz sličnosti trouglova OQA i OMN odnosno trouglova OBR i OMN (Sl. 19) slijedi

$$\operatorname{tg}\alpha = \overline{AQ} \text{ odnosno } \operatorname{ctg}\alpha = \overline{BR}.$$

Zbog toga tangentu t_1 na trigonometrijsku kružnicu u tački $A(1,0)$ (Sl. 19) zovemo tangensnom osom, a tangentu t_2 na trigonometrijsku kružnicu u tački $B(0,1)$ (Sl. 19.) zovemo kotangensnom osom.

Sada funkcije tangens i kotangens možemo definisati i ovako:

Funkciju koja svakom realnom broju $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$ dodjeljuje broj jednak ordinati tačke u kojoj prava koja sadrži drugi krak ugla α siječe tangensnu osu zovemo tangens.

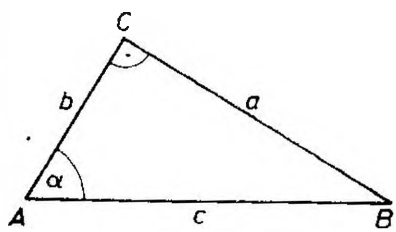
Funkciju koja svakom realnom broju $\alpha \neq k\pi$ $(k \in Z)$ dodjeljuje broj jednak apscisi tačke u kojoj prava koja sadrži drugi krak ugla α siječe kotangensnu osu zovemo kotangens.

3.3. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE UGLOVA PRAVOUGLOG TROUGLA

Neka je dat pravougli trougao ABC (Sl. 20), čije su stranice a, b, c.

Tada vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



Sl. 20.

3.4. VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA NEKIH UGLOVA

Korisno je znati vrijednosti trigonometrijskih funkcija slijedećih uglova:

UGAO / FUNKCIJA	0° (0)	30° $(\frac{\pi}{6})$	45° $(\frac{\pi}{4})$	60° $(\frac{\pi}{3})$	90° $(\frac{\pi}{2})$	180° (π)	270° $(\frac{3\pi}{2})$	360° (2π)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Tabela 1.

3.5. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE SUPROTNOG BROJA.

Periodičnost trigonometrijskih funkcija.

Kosinus je parna, a sinus, tangens i kotangens su neparne funkcije, t.j. vrijede slijedeće formule:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus su periodične sa osnovnim periodom 2π; trigonometrijske funkcije tangens i kotangens su periodične sa osnovnim periodom π, tj. vrijede slijedeće formule:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \\ \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha. \end{array}\right\} \quad k \in Z)$$

3.6. ADICIONE FORMULE

Za trigonometrijske funkcije vrijede slijedeće tzv. adicione formule

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}.$$

3.7. JOŠ NEKI TRIGONOMETRIJSKI IDENTITETI

a) Osnovni trigonometrijski identiteti:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

b) Izražavanje sinusa i kosinusa pomoću tangensa i kotangensa vrši se pomoću formula:

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

c) Trigonometrijske funkcije dvostrukog argumenta:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

d) Trigonometrijske funkcije polovine argumenta:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \qquad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \qquad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}.$$

e) Pretvaranje zbira i razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod vrši se pomoću formula:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

f) Pretvaranje proizvoda trigonometrijskih funkcija u zbir, odnosno razliku trigonometrijskih funkcija vrši se pomoću formula:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)].$$

3.8. SINUSNA I KOSINUSNA TEOREMA. RJEŠAVANJE KOSOUGLOG TROUGLA

Sinusna i kosinusna teorema izražavaju vezu između dužina stranica i uglova trougla.

a) *Sinusna teorema glasi:*

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

ili

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

b) *Kosinusna teorema glasi:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

c) *Rješavanje kosouglog trougla*

Riješiti trougao znači odrediti njegove osnovne elemente: dužine stranica i uglove. Kosougli trougao možemo rješavati pomoću sinusne i kosinusne teoreme.

Sinusnu teoremu upotrebljavamo ako su dati:

1) dužina jedne stranice i dva ugla trougla,

2) dužine dviju stranica i ugao nasuprot jedne od njih.

Kosinusnu teoremu upotrebljavamo ako su dati:

3) dužine dviju stranica i ugao između njih,

4) dužine triju stranica trougla.

3.9. TRIGONOMETRIJSKE JEDNAČINE

Trigonometrijskom jednačinom zovemo jednačinu kod koje se nepoznata nalazi u argumentu trigonometrijskih funkcija. Za ove jednačine karakteristično je to da (ukoliko nisu uvedena neka dodatna ograničenja) imaju beskonačno mnogo rješenja. Ne postoji neka opšta metoda za rješavanje trigonometrijskih jednačina. Zbog toga ćemo ukazati na način rješavanja samo nekih tipova trigonometrijskih jednačina.

a) *Osnovne trigonometrijske jednačine*

Jednačine

$\sin x = a$ (1), $\cos x = a$ (2), $\operatorname{tg} x = a$ (3), $\operatorname{ctg} x = a$ (4) zovu se osnovne trigonometrijske jednačine.

Kako je $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$ jednačine (1) i (2) imaju rješenje samo uz uslov $|a| \leq 1$.

a_1) Rješavanje jednačine $\sin x = a$ $(|a| \leq 1)$ (1)

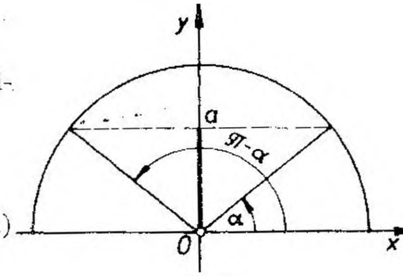
Riješiti jednačinu $\sin x = a$ ($|a| \leqslant 1$) znači naći sve one vrijednosti argumenta x za koje $\sin x$ ima zadanu vrijednost a. Kako za $|a| < 1$ postoje dva realna broja iz $(0,2\pi)$ čiji sinus ima zadanu vrijednost a, pri rješavanju date jednačine treba prvo odrediti ta dva broja, pa zatim, koristeći periodičnost funkcije sinus, odrediti i ostala rješenja.

Mogu nastupiti dva slučaja:

(i) $0 \leqslant a \leqslant 1$, kada su sva rješenja jednačine (1) data sa:

$$x = \alpha + 2k\pi \text{ i } x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

$$\left(\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin\alpha = a\right)$$ (Slika 21.)

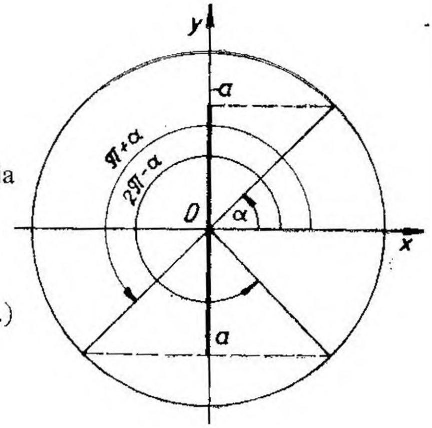


Sl. 21.

(ii) $-1 \leqslant a \leqslant 0$, kada su sva rješenja jednačine (1) data sa:

$$x = \pi + \alpha + 2k\pi \text{ i } x = 2\pi - \alpha + 2k\pi$$

$$\left(\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin\alpha = -a\right)$$ (slika 22.)



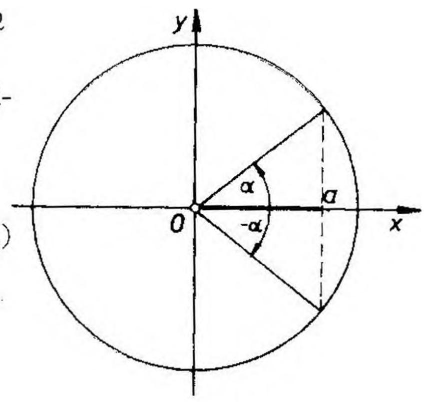
Sl. 22.

a2) Rješavanje jednačine $\cos x = a$ ($|a| \leqslant 1$) (2
Mogu nastupiti dva slučaja:

(i) $0 \leqslant a \leqslant 1$, kada su sva rješenja jednačine (2) data sa

$$x = \pm \alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$$

$$\left(\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos\alpha = a\right)$$ (Slika 23.)

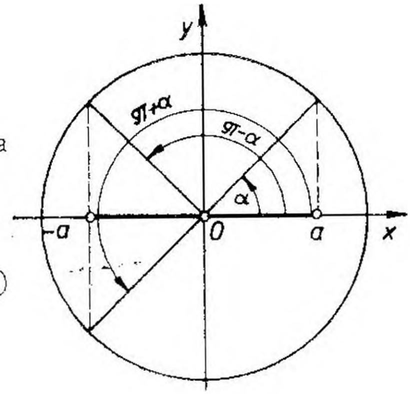


Sl. 23.

(ii) $-1 \leqslant a \leqslant 0$, kada su sva rješenja jednačine (2) data sa

$$x = \pi \pm \alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$$

$\left(\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos\alpha = -a\right)$ (Slika 24.)

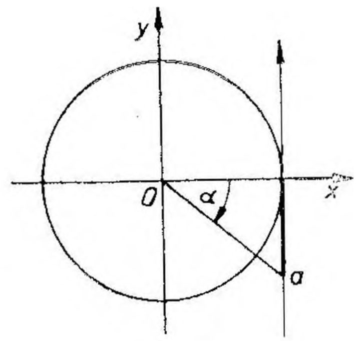


Sl. 24.

a_3) Rješavanje jednačine $\operatorname{tg} x = a$ (3). Sva rješenja jednačine (3) data su sa

$$x = \alpha + k\pi \quad (k \in Z)$$

$\left(\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg}\alpha = a\right)$ (Slika 25.)



Sl. 25.

a_4) Jednačina $\operatorname{ctg} x = a$ (4)

Kako je $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, jednačina (4) svodi se na slučaj a_3).

b) Jednačina

$\sin(bx + c) = a$ ($\cos(bx + c) = a$, $\operatorname{tg}(bx + c) = a$, $\operatorname{ctg}(bx + c) = a$) smjenom $bx + c = t$ svodi se na osnovne trigonometrijske jednačine.

c) Jednačina

$$\sin(ax + b) = \sin(cx + d)$$

($\cos(ax + b) = \cos(cx + d)$, $\operatorname{tg}(ax + b) = \operatorname{tg}(cx + d)$, $\operatorname{ctg}(ax + b) = \operatorname{ctg}(cx + d)$) primjenom adicionih teorema svodi se na slučaj b).

d) Jednačina

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$$

$(a \cos^2 x + b \cos x + c = 0, \quad a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0, \quad a \operatorname{ctg}^2 x + b \operatorname{ctg} x + c = 0)$ smjenom $\sin x = t$ $(\cos x = t, \ \operatorname{tg} x = t, \ \operatorname{ctg} x = t)$ prelazi u jednačinu

$$a t^2 + b t + c = 0.$$

Ako su t_1 i t_2 rješenja te jednačine, tada se rješavanje jednačine (1) svodi na rješavanje osnovnih jednačina.

e) Jednačina

$$a \sin x + b \cos x = c \quad . \quad (|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2})$$

smjenom $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ $\left(\sin x = \frac{2t^2}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ svodi se na slučaj b).

Kako $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ nije definisano za $x = (2k-1)\pi$, te vrijednosti ne mogu biti rješenja dobijene jednačine, ali mogu biti rješenja date trigonometrijske jednačine, što treba posebno ispitati.

Napomena: Ovaj metod se može primijeniti u slučaju kada je trigonometrijska jednačina racionalna po trigonometrijskim funkcijama koje u njoj figuriraju. To, međutim, može često dovesti do složenijih jednačina. Zbog toga za svaku trigonometrijsku jednačinu treba naći najprikladniji metod.

4. OSNOVI MATEMATIČKE LOGIKE

4.1. POJAM SUDA

Izjavna rečenica, koja ima smisla, jeste sud onda i samo onda ako ima jedno od sljedeća dva svojstva:

1) istinita je

2) neistinita je.

Ovo je intuitivna definicija suda.

Sudove ćemo označavati velikim slovima: $A, B, C, \ldots$

Ako je sud A istinit, pisaćemo:

$\tau A = \top$ (simbol $\top$, čitaj: te).

Ako je sud A neistinit, pisaćemo:

$\tau A = \bot$ (simbol $\bot$ čitaj: ne — te).

4.2. OPERACIJE SA SUDOVIMA

Polazeći od osnovnih sudova, možemo graditi nove, složenije sudove. Razmotrimo najjednostavnije postupke za izgrađivanje složenih sudova.

a) *Negacija*

Neka je A neki dat sud. Simbolom $\neg A$ (čitaj: ne A) označavamo novi sud koji nazivamo *negacija* suda A i za koji vrijedi: Ako je $\tau A = \top$, onda je $\tau(\neg A) = \bot$; ako je $\tau A = \bot$, onda je $\tau(\neg A) = \top$.

b) *Konjunkcija*

Neka su A i B neki dati sudovi. Simbolom $A \wedge B$ (čitaj: A i B) označavamo složeni sud koji nazivamo *konjunkcija* sudova A i B i koji je istinit onda i samo onda ako su oba suda A i B istinita.

c) *Disjunkcija*

Neka su A i B neki dati sudovi. Simbolom $A \vee B$ (čitaj: A ili B) označavamo složeni sud koji nazivamo *disjunkcija* sudova A i B i koji je neistinit onda i samo onda ako su oba suda A i B neistinita.

d) *Implikacija*

Neka su A i B neki dati sudovi. Simbolom $A \Rightarrow B$ (čitaj: A implicira B označavamo složeni sud koji nazivamo *implikacija* i koji je neistinit onda i samo onda ako je A istinit a B neistinit sud.

Simbol $A \Rightarrow B$ čitamo i ovako:

1) iz A slijedi B,

2) A je dovoljan uslov za B,

3) B je potreban uslov za A.

e) *Ekvivalencija*

Neka su A i B neki dati sudovi. Simbolom $A \Leftrightarrow B$ (čitaj: A ekvivalentno B) označavamo složeni sud koji nazivamo *ekvivalencija* i koji je istinit onda i samo onda ako oba suda A i B imaju istu vrijednost istinitosti.

Simbol $A \Leftrightarrow B$ čitamo i ovako:

1) A je onda i samo onda ako je B,

2) A je potreban i dovoljan uslov za B.

4.3. KVANTIFIKATORI

Neka je $p(x)$ rečenica, a x element nekog skupa A. Ako je $p(x)$ sud za svaki element x iz skupa A, tada $p(x)$ nazivamo *predikatom* na skupu A.

Univerzalni kvantifikator

Neka je $p(x)$ predikat na skupu A. Tada simbol

$$(\forall x \in A)\ p(x)$$

čitamo: za svako x iz A je $p(x)$.

Egzistencijalni kvantifikator

Neka je $p(x)$ predikat na skupu A. Simbol

$$(\exists a \in A)\ p(a)$$

čitamo: postoji (bar jedan) element $a \in A$ za koji je $p(a)$ istinit sud.

5. SKUPOVI

5.1. POJAM SKUPA

Skup i njegovi elementi su osnovni pojmovi matematike. Ako skup S sačinjavaju elementi $x, y, z \ldots,$ označava se

$$S = \{x, y, z, \ldots\}.$$

Sa $S = \{x \mid P(x)\}$ označava se skup svih elemenata x koji imaju osobinu P.

Ako je S skup, tada $x \in S$ označava da je x element skupa S ili da x pripada skupu S.

Ako je svaki element skupa A takođe element skupa B, kažemo da je A podskup skupa B što označavamo sa:

$$A \subset B \quad \text{ili} \quad B \supset A.$$

Dva skupa A i B su jednaka, tj. $A = B$ ako, i samo ako, je $A \subset B$ i $B \subset A$.

5.2. OPERACIJE SA SKUPOVIMA

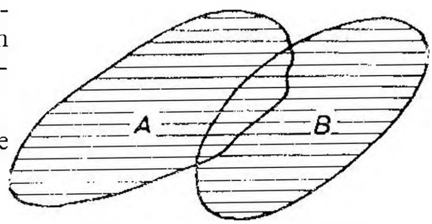
Definisaćemo operacije unije, presjeka, razlike i proizvoda skupova, tj. pridružićemo nove skupove paru skupova A i B.

a) *Unija skupova*

Unija skupova A i B je skup koji sačinjavaju svi elementi koji pripadaju bar jednom od skupova A i B. Uniju skupova A i B označavamo sa $A \cup B$.

Pomoću logičkih simbola $A \cup B$ se definiše ovako:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



A∪B JE OSJENČENA

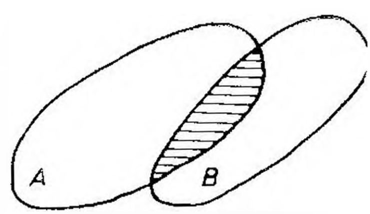
Sl. 26.

b) *Presjek skupova*

Presjek skupova A i B je skup koji sačinjavaju svi elementi koji istovremeno pripadaju i skupu A i skupu B. Presjek skupova A i B označava se sa $A \cap B$.

Pomoću logičkih simbola definicija presjeka skupova A i B glasi:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

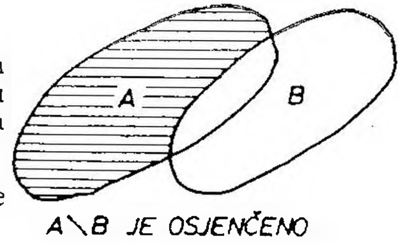


A∩B JE OSJENČEN

Sl. 27.

c) *Razlika skupova*

Razlika skupova A i B je skup svih onih elemenata skupa A koji ne pripadaju skupu B. Razlika od A i B označava se sa $A \setminus B$.



Sl. 28.

Pomoću logičkih simbola $A \setminus B$ se definiše ovako:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

d) *Proizvod skupova*

Proizvod skupova A i B je skup koji se sastoji od svih uređenih parova (a, b) gdje je $a \in A$ i $b \in B$.

Proizvod skupova A i B označavamo sa $A \times B$.

Dakle,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Na kraju smatramo korisnim da u formi savjeta, kojih se treba pridržavati, istaknemo osnovne etape procesa rješavanja zadatka.

Prvo, mora se uočiti zahtjev (cilj) zadatka, odnosno mora se razdvojiti šta je poznato, a šta nepoznato u zadatku.

Drugo, na bazi stečenog znanja (matematičke teorije i iskustva u rješavanju zadataka) stvara se (domišlja se) ideja kako, koristeći poznate elemente zadatka, možemo dobiti cilj zadatka. Dakle, formira se koncepcija rješavanja zadatka. Razumije se da se u prvom pokušaju ne dolazi uvijek do one ideje (koncepcije) koja vodi rješenju (cilju) zadatka.

Treće, u toku izrade zadatka treba u svakom momentu znati odgovoriti na pitanja: šta je dobijeno, šta još treba dobiti i zašto?

Četvrto, po dobijanju rezultata (cilja) zadatka treba izvršiti provjeru rezultata i u cjelini sagledati početak, proces rješavanja i rezultat zadatka.

II DIO

ZADACI SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKOM FAKULTETU U SARAJEVU

ZADACI NA KVALIFIKACIONOM ISPITU ODRŽANOM 27. juna 1983. g.

Prva smjena

Zadaci:

1) Odrediti a tako da jednačina

$$(a - 2)\,x^2 - 2ax + a - 3 = 0$$

nema realnih korijena.

2) U jednačini

$$y = x^2 + bx + c$$

odrediti koeficijente b i c tako da se dobije parabola koja siječe osu x u tačkama $A\,(-7{,}0)$ i $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

3) Riješiti jednačinu:

$$\log \sqrt[3]{10\,(x-1)^2} - \frac{2}{3}\log\,(3 + x) = \frac{1}{3}.$$

4) Naći vrijednost izraza

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}$$

ako je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} = \frac{2}{15}$.

5) Dužina izvodnice konusa jednaka je a, a dužina kružnice osnove konusa jednaka je c. Kolika je zapremina konusa?

Rješenja:

1) Parametar a treba odrediti tako da diskriminanta D kvadratne jednačine

$$(a - 2)\,x^2 - 2ax + a - 3 = 0 \qquad \text{(J)}$$

bude negativna.

Diskriminanta D jednačine (J) je

$$D = 4a^2 + 4(a-2)(a+3) = 8a^2 + 4a - 24.$$

Kako je $D < 0$, imamo:

$$8a^2 + 4a - 24 < 0$$

tj.

$$2a^2 + a - 6 < 0.$$

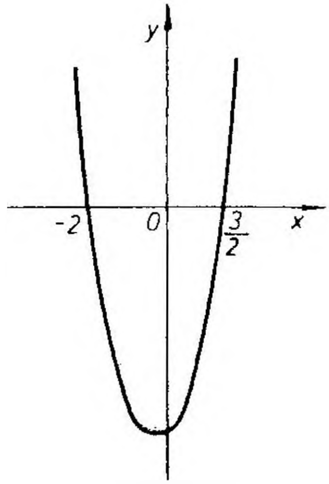
Dakle, treba odrediti skup svih realnih brojeva za koje je

$$2a^2 + a - 6 < 0. \qquad \text{(N)}$$

Diskriminanta kvadratne funkcije $y = 2a^2 + a - 6$ je $D = 49 > 0$; nule funkcije su $a_1 = -2$, $a_2 = \frac{3}{2}$; koeficijent uz kvadratni član je $1 > 0$, pa je grafik funkcije parabola „okrenuta na gore" (gledajući odozgo grafik je konkavna parabola).

Vidi se da je funkcija negativna u intervalu $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$. Prema tome skup svih rješenja nejednačine (N) je interval $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$.

Rezultat: $a \in \left(-2, \frac{3}{2}\right)$



Sl. 29.

2) Treba naći takve brojeve b i c da parabola $y = x^2 + bx + c$ siječe x-osu u tačkama $A(-7{,}0)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Uvrstimo koordinate tačaka $A(-7{,}0)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ u kvadratnu jednačinu. Tada dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} 49 - 7b + c &= 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}b + c &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (S)$$

U (S) prepoznajemo sistem od dvije linearne jednačine sa nepoznanicama b i c koji je ekvivalentan sistemu

$$\left.\begin{aligned} -7b + c &= -49 \\ \frac{1}{2}b + c &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}\right\} \quad (S').$$

Rješavanjem sistema (S') (metodom „jednakih koeficijenata" ili metodom „zamjene") dobićemo

$$b = \frac{13}{2}, \quad c = -\frac{7}{2}.$$

Provjeri!

Rezultat: $$b = \frac{13}{2}, \quad c = -\frac{7}{2}$$

Možeš li zadatak riješiti na neki drugi način?

Možda ćeš postaviti pitanje zašto razmatrati druge mogućnosti rješavanja zadatka kada jedno rješenje već imamo. Navikneš li se da tragaš za novim i boljim rješenjima možeš otkriti neke nove i zanimljive činjenice. A u svakom slučaju, ako se navikneš da svoja rješenja pregledavaš i provjeravaš steći ćeš sređeno i upotrebljivo znanje i razviti svoje sposobnosti u rješavanju zadataka.

Iz uslova zadatka jasno je da su

$$x_1 = -7, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

rješenja kvadratne jednačine

$$x^2 + bx + c = 0.$$

Iz poznatih Vijetovih formula

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

dobijamo

$$b = \frac{13}{2}$$

$$c = -\frac{7}{2}.$$

3) Odredimo definiciono područje D jednačine

$$\log \sqrt[3]{10(x-1)^2} - \frac{2}{3} \log (3 + x) = \frac{1}{3}. \qquad (J)$$

To definiciono područje je skup svih realnih brojeva x za koje vrijedi

$$3 + x > 0 \wedge x - 1 \neq 0.$$

Dakle,

$$D = (-3,1) \cup (1, +\infty).$$

Primjenom pravila za logaritme

$$p \log_a x = \log_a x^p$$

$$(x > 0,\ y > 0,\ 0 < a \neq 1)\ (*)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

jednačinu (J) svedimo u definicionom području D na ekvivalentnu jednačinu oblika

$$\log f(x) = \log g(x)$$

koja je u D ekvivalentna jednačini

$$f(x) = g(x).$$

Imamo:

$$(J) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log 10(x-1)^2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \log (3+x)^2 \Leftrightarrow \log 10(x-1)^2 - \log 10 =$$

$$= \log (3+x)^2 \Leftrightarrow \log (x-1)^2 = \log (3+x)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = (3+x)^2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Kako je $-1 \in D$, to je $x = -1$ rješenje jednačine (J).

Rezultat: $x = -1$

Napomena: Jednačinu (J) mogli smo transformisati u jednačinu oblika $\log f(x) = \log g(x)$, primjenom pravila $(*)$, i na slijedeći način

Prvi način:

$$(J) \Leftrightarrow \log \sqrt[3]{10(x-1)^2} - \log \sqrt[3]{(3+x)^2} = \log 10^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \log \sqrt[3]{\frac{10(x-1)^2}{(3+x)^2}} =$$

$$= \log \sqrt[3]{10} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{10(x-1)^2}{(3+x)^2}} = \sqrt[3]{10} \Leftrightarrow x = -1$$

Drugi način:

$$(J) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log 10(x-1)^2 - \frac{1}{3} \log (3+x)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log \frac{10(x-1)^2}{(3+x)^2} = \log 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

4) Odredimo prvo definiciono područje D datog izraza. Kako je $\operatorname{tg} \alpha$ definisano za svako $\alpha \in R$, $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$ i kako je osim toga:

$$\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \sin \alpha = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha}$$

to je

$$D = \{\alpha \in R: \cos\alpha \neq 0,\ \sin\alpha \neq 0,\ \cos\alpha + 1 \neq 0\} = \{\alpha \in R: \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$$
$$\alpha \neq k\pi,\ \alpha \neq (2k+1)\pi\ (k \in Z)\}.$$

Dakle,

$$D = \{\alpha \in R: \alpha \neq k\frac{\pi}{2}\ (k \in Z)\}.$$

Ako je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{15}$, tada je $\alpha \in D$, pa za to α ima smisla tražiti vrijednost datog izraza.

Sada ćemo, koristeći poznate trigonometrijske identitete, dati izraz transformisati tako da dobijemo

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha} = f\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Kako je

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha}{\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\ (\forall\alpha \in D),$$

to je

$$\left(\frac{2}{15}\right)^2 = \frac{4}{225}$$

tražena vrijednost.

Rezultat: $\frac{4}{225}$

Napomena: Ako ne znamo trigonometrijski identitet

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

tada koristeći trigonometrijske identitete

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha$$

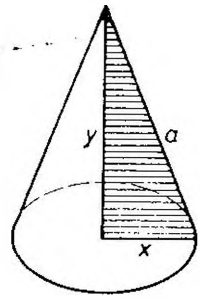
dobijamo:

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

5) Kao što je poznato zapremina konusa data je formulom

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 y,$$

gdje je veličina x radius kružne osnove konusa, a y visina konusa (Slika 30.)



Sl. 30.

Kako dužina kružnice osnove iznosi c, to je

$$2x\pi=c.$$

Otuda je

$$x=\frac{c}{2\pi}.$$

Visina y je kateta osjenčenog pravouglog trougla (Sl. 30.), kome je druga kateta $\frac{c}{2\pi}$, a hipotenuza je a. Izračunaćemo je po Pitagorinom pravilu:

$$y^2=a^2-\left(\frac{c}{2\pi}\right)^2.$$

Dakle,

$$y=\frac{\sqrt{4a^2\pi^2-c^2}}{2\pi}.$$

Sada je

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{c^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4a^2\pi^2-c^2}=\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4a^2\pi^2-c^2}.$$

Rezultat:

$$V=\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4a^2\pi^2-c^2}$$

Druga smjena

Zadaci:

1) Naći vrijednost izraza

$$\frac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$$

ako je

$$x = \frac{2mn}{n^2+1}. \qquad (m > 0, \qquad 0 < n < 1)$$

2) Riješiti nejednačinu

$$\frac{12x-13}{7x-8} > 3.$$

3) Odrediti definiciono područje funkcije

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{25x^2-4x}}.$$

4) Riješiti jednačinu

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

5) Ako su α, β, γ oštri uglovi trougla, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$, izračunati $\sin\gamma$.

Rješenja:

1) Označimo sa $M(x)$ dati izraz. Definiciono područje D izraza $M(x)$ je:

$$D = \{x \in R\colon m + x \geqslant 0,\ m - x \geqslant 0,\ (m+x)^{\frac{1}{2}} - (m-x)^{\frac{1}{2}} \neq 0\} =$$
$$= \{x \in R\colon |x| \leqslant m\ (m > 0),\ x \neq 0\}.$$

Kako je

$x = \frac{2mn}{n^2+1}$ definisano za svako $m, n \in R$ i kako je, osim toga, $\frac{2mn}{n^2+1} \in D$, to ima smisla računati vrijednost izraza $M(x)$ za $x = \frac{2mn}{n^2+1}$.

Dovedimo $M(x)$ na najjednostavniji mogući oblik, pa tek onda izračunajmo njegovu vrijednost za

$$x = \frac{2mn}{n^2+1}.$$

Racionališimo nazivnik izraza $M(x)$:

$$M(x) = \frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}} \cdot \frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}} =$$

$$= \frac{m+x+2\sqrt{(m+x)(m-x)}+m-x}{m+x-(m-x)} =$$

$$= \frac{2(m+\sqrt{m^2-x^2})}{2x} = \frac{m+\sqrt{m^2-x^2}}{x}.$$

Vijednost izraza $M(x)$ za $x = \frac{2mn}{n^2+1}$ iznosi:

$$M\left(\frac{2mn}{n^2+1}\right) = \frac{m + \sqrt{m^2 - \frac{4m^2n^2}{(n^2+1)^2}}}{\frac{2mn}{n^2+1}} = \frac{m + \sqrt{m^2 \cdot \frac{n^4+2n^2+1-4n^2}{(n^2+1)^2}}}{\frac{2mn}{n^2+1}} =$$

$$= \frac{m(n^2+1) + m\sqrt{(n^2-1)^2}}{2mn} = \frac{m(n^2+1) + m\,|n^2-1|}{2mn} =$$

$0 < n < 1$

$\underline{\underline{|n^2-1| = -(n^2-1)}}$ $\frac{m(n^2+1-n^2+1)}{2mn} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$.

Rezultat: $\frac{1}{n}$.

Napomena 1: U ovom primjeru smo pomoću računskih operacija dati izraz sveli na prostiji oblik, pa smo tek tada u dobijeni prostiji oblik uvrstili izraz kojim je zadana veličina x. Ovdje bismo, iznimno, zbog oblika veličine x, brže došli do rezultata direktnom zamjenom. Zaista:

$$M\left(\frac{2mn}{n^2+1}\right) = \frac{\sqrt{m + \frac{2mn}{n^2+1}} + \sqrt{m - \frac{2mn}{n^2+1}}}{\sqrt{m + \frac{2mn}{n^2+1}} - \sqrt{m - \frac{2mn}{n^2+1}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{m} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1+2n}}{\sqrt{n^2+1}} + \sqrt{m} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1-2n}}{\sqrt{n^2+1}}}{\sqrt{m} \cdot \frac{\sqrt{n^2+2n+1}}{\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{m} \cdot \frac{\sqrt{n^2-2n+1}}{\sqrt{n^2+1}}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n^2+1}}\left(\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{(n-1)^2}\right)}{\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n^2+1}}\left(\sqrt{(n+1)^2} - \sqrt{(n-1)^2}\right)} =$$

$$= \frac{|n+1| + |n-1|}{|n+1| - |n-1|} = \frac{n+1-n+1}{n+1+n-1} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Napomena 2.

Većina kandidata na kvalifikacionom ispitu nije vodila računa o tome da je

$$\sqrt{(n^2-1)^2} = |n^2-1|, \qquad \sqrt{(n+1)^2} = |n+1|, \qquad \sqrt{(n-1)^2} = |n-1|,$$

te da je zbog $0 < n < 1$

$$n^2 - 1 < 0, \ n + 1 > 0, \ n - 1 < 0,$$

pa je redom

$$|n^2 - 1| = -(n^2 - 1)$$

$$|n + 1| = n + 1$$

$$|n - 1| = -(n - 1),$$

odnosno,

$$\sqrt{(n^2 - 1)^2} = -(n^2 - 1), \quad \sqrt{(n + 1)^2} = n + 1, \quad \sqrt{(n - 1)^2} = -(n - 1).$$

2) Odredimo najprije definiciono područje D nejednačine

$$\frac{12x - 13}{7x - 8} > 3. \tag{N}$$

D je skup svih realnih brojeva x za koje je $7x-8 \neq 0$, t.j. $x \neq \frac{8}{7}$.

Dakle,

$$D = R \setminus \left\{\frac{8}{7}\right\}.$$

Napišimo nejednačinu (N) u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$$

gdje su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi u varijabili x.

Iz (N) imamo

$$\frac{12x - 13}{7x - 8} - 3 > 0,$$

odnosno,

$$\frac{-9x + 11}{7x - 8} > 0. \tag{N$_1$}$$

Skup svih realnih brojeva x za koje su brojnik i nazivnik izraza na lijevoj strani nejednačine (N_1) istog znaka su rješenja te nejednačine.

Riješimo nejednačinu (N_1) na nekoliko načina:

a) Rješavanje nejednačine (N_1) svedimo na rješavanje sistema linearnih nejednačina.

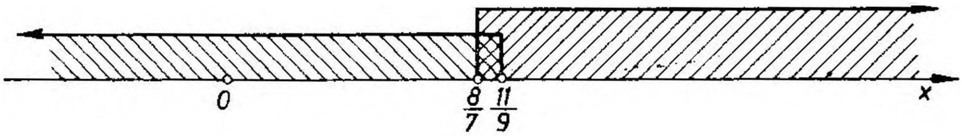
Naime, količnik je pozitivan ako su djeljenik i djelitelj oba pozitivna ili oba negativna, dakle,

$$\left.\begin{array}{r} -9x + 11 > 0 \\ 7x - 8 > 0 \end{array}\right\} (S_1) \quad \vee \quad \left.\begin{array}{r} -9x + 11 < 0 \\ 7x - 8 < 0 \end{array}\right\} (S_2)$$

Skup rješenja prve nejednačine sistema (S_1) je $\left(-\infty, \frac{11}{9}\right)$, a druge $\left(\frac{8}{7}, +\infty\right)$.

Skup rješenja sistema (S_1) je:

$$\left(-\infty, \frac{11}{9}\right) \cap \left(\frac{8}{7}, +\infty\right) = \left(\frac{8}{7}, \frac{11}{9}\right) \qquad \text{(Vidi sl. 31)}$$

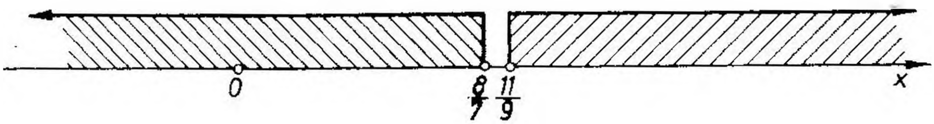


Sl. 31.

Skup rješenja prve nejednačine sistema (S_2) je $\left(\frac{11}{9}, +\infty\right)$, a druge $\left(-\infty, \frac{8}{7}\right)$

Skup rješenja sistema (S_2) je:

$$\left(\frac{11}{9}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{8}{7}\right) = \emptyset \qquad \text{(Vidi sl. 31a)}$$



Sl. 31 a.

Rješenje nejednačine (N_1) je unija skupa rješenja sistema (S_1) i (S_2), dakle, $\left(\frac{8}{7}, \frac{11}{9}\right)$.

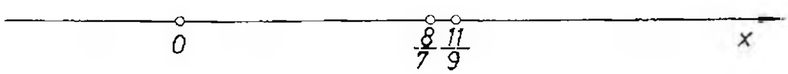
Prema tome je rješenje nejednačine (N) interval $\left(\frac{8}{7}, \frac{11}{9}\right)$.

Rezultat: $\left(\frac{8}{7}, \frac{11}{9}\right)$

b) Nadimo nule polinoma u brojniku i nazivniku izraza

$$\frac{-9x + 11}{7x - 8}.$$

Istaknimo ih na brojnom pravcu



Sl. 32.

Tačke $\frac{8}{7}$ i $\frac{11}{9}$ su krajevi intervala: $\left(-\infty, \frac{8}{7}\right)$, $\left(\frac{8}{7}, \frac{11}{9}\right)\left(\frac{11}{9}, +\infty\right)$

(Zašto su tačke $\frac{8}{7}$ i $\frac{11}{9}$ isključene?)

U svakom od tih intervala izrazi $-9x + 11$, $7x - 8$ imaju konstantan znak (ili su pozitivni, ili su negativni).

U ovisnosti o njihovom znaku odredićemo i znak njihovog količnika.

Ova ispitivanja zgodno je iznijeti u vidu tabele. Zbog toga se ovaj metod rješavanja nejednačine često naziva i „tabelarnim metodom".

x	$(-\infty, \frac{8}{7})$	$\frac{8}{7}$	$(\frac{8}{7}, \frac{11}{9})$	$\frac{11}{9}$	$(\frac{11}{9}, \infty)$
$-9x+11$	+		+	0	−
$7x-8$	−	0	+		+
$\frac{-9x+11}{7x-8}$	−		⊕		−

Tabela 2.

Iz tabele se vidi da je skup rješenja zadane nejednačine

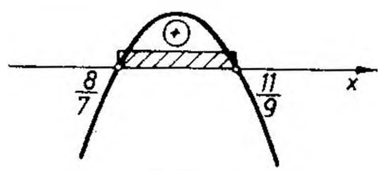
$$\left(\frac{8}{7}, \frac{11}{9}\right)$$

c) Množenjem nejednačine (N) sa $(7x - 8)^2$ dobićemo

$$(-9x + 11) \cdot (7x - 8) > 0 \; (N_2)$$

Lijeva strana nejednačine (N_2) je kvadratna funkcija čije su nule $\frac{8}{7}$, $\frac{11}{9}$. Koeficijent uz kvadratni član je $(-9) \cdot 7 < 0$, pa je skica njenog grafika kao na slici 33.

Sa (Sl. 33.) se vidi da je funkcija pozitivna u $\left(\frac{8}{7}, \frac{11}{9}\right)$.



Sl. 33.

Dakle, skup rješenja nejednačine (N) je $\left(\frac{8}{7}, \frac{11}{9}\right)$.

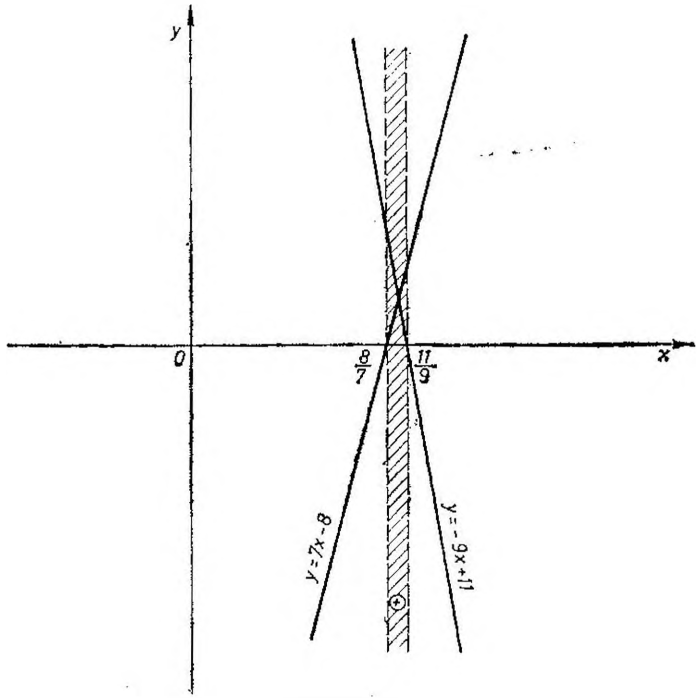
Metod c) se često naziva „grafičkim metodom" rješavanja nejednačine.

d) Razmotrimo još jedan od grafičkih metoda rješavanja nejednačine.

Nacrtajmo (približno) grafike funkcija:

$$y = -9x + 11, \; y = 7x - 8.$$

Istaknimo tačke u kojima dati pravci sijeku x osu. Rješenja nejednačine (N_1) jesu one vrijednosti x za koje se oba grafika nalaze sa „iste strane" x ose (oba su iznad x ose, ili, oba su ispod x ose).



Sl. 34.

Sa sl. 34. se vidi da su oba pravca sa iste strane x ose jedino u intervalu

$$\left(\frac{8}{7}, \frac{11}{9}\right),$$

Dakle, rješenje nejednačine (N) je interval $\left(\frac{8}{7}, \frac{11}{9}\right)$.

3) Definiciono područje $D(f)$ funkcije

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{25x^2 - 4x}}$$

je skup svih realnih brojeva x za koje je ispunjen uslov:

$$25x^2 - 4x > 0 \qquad (N).$$

Nule kvadratne funkcije $y = 25x^2 - 4x$ su $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{25}$.

Pošto je $a = 25$ tj. $a > 0$, to je $25x^2 - 4x > 0$ u intervalima

$$(-\infty, 0) \text{ i } \left(\frac{4}{25}, +\infty\right) \qquad \text{(Vidi sl. 35.)}$$

Prema tome skup rješenja nejednačine (N) je

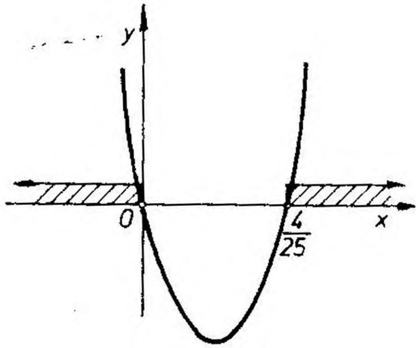
$$(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{25}, + \cup\right)$$

Dakle,

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{25}, + \infty\right)$$

Rezultat:

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{25}, + \infty\right)$$



Sl. 35.

4) U jednačini

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \qquad (J)$$

nepoznata x je u eksponentu stepena, pa je to eksponencijalna jednačina.

Definiciono područje D jednačine (J) je $D = R$.

Jednačinu (J) svešćemo na oblik jednakosti dvaju stepena jednakih osnova

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \ 0 < a \neq 1 \qquad (J_1)$$

gdje su $f(x)$ i $g(x)$ polinomi. Jednačina (J_1) je u D ekvivalentna jednačini $f(x) = g(x)$.

Imamo:

$$(J) \Leftrightarrow 4^x + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 4^x + 4^x \cdot 2^{-1} = 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3^x \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 4^x \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \cdot (3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 4^x = \frac{4}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x =$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Dakle, rješenje jednačine (J) je $x = \frac{3}{2}$.

Rezultat: $x = \frac{3}{2}$

5) Kako je

$$\gamma = \pi-(\alpha + \beta),$$

to je

$$\sin\gamma = \sin[\pi-(\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta).$$

Odavde, primjenom adicione teoreme, dobijamo:

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

Da bismo odredili $\sin\gamma$, treba još samo naći $\cos\alpha$ i $\cos\beta$.

$$\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\cos\beta = +\sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Dakle,

$$\sin\gamma = \frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{63}{65}.$$

Rezultat:

$$\sin\gamma = \frac{63}{65}.$$

Treća smjena

Zadaci

1) Dokazati da je

$$a^{\frac{1}{2}} - \frac{a - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1 - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} = 0. \qquad (0 < a \neq 1)$$

2) Za koje vrijednosti parametra k jednačina

$$(k+3)x^2 - 2(k+1)x + k - 5 = 0$$

ima realna rješenja?

3) Riješiti nejednačinu:

$$\frac{6}{x-2} \geqslant 2x - 3.$$

4) Bez upotrebe tablica odrediti x ako je

$$x = 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2} \qquad \text{(baza je 10)}$$

5) Dokazati da vrijedi jednakost:

$$\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - 2\cos\alpha + 1} = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Rješenja:

1) Uz uslov $0 < a \neq 1$ definisani su svi izrazi u datoj jednakosti. Dokažimo da za svako a koje zadovoljava taj uslov vrijedi data jednakost.

Zaista,

$$a^{\frac{1}{2}} - \frac{a - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1 - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}) - (a - a^{-2})(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}) + (1 - a^{-2})(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})}{(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})} + \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + a^{-\frac{5}{2}} + a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} + a^{-\frac{5}{2}}}{a - a^{-1}} + \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{-2a^{-\frac{1}{2}} + 2a^{-\frac{5}{2}}}{a - a^{-1}} + 2a^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= -2a^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{a - a^{-1}}{a - a^{-1}} + 2a^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= -2a^{-\frac{3}{2}} + 2a^{-\frac{3}{2}} = 0.$$

2) Rješenja jednačine

$$(k + 3)x^2 - 2(k + 1)x + k - 5 = 0 \qquad (J)$$

su realna ako je diskriminanta D jednačine (J) nenegativna, t.j.

$$D \geqslant 0 \qquad (D = b^2 - 4ac),$$

odnosno,

$$4(k + 1)^2 - 4(k + 3)(k - 5) \geqslant 0. \qquad (N)$$

Nejednačina (N) ekvivalentna je nejednačini

$$k + 4 \geqslant 0. \qquad (N_1)$$

Rješenje nejednačine (N_1) je $k \geqslant -4$. Prema tome, rješenja jednačine (J) su realna ako je $k \geqslant -4$.

Rezultat: $k \geqslant -4$.

3) Definiciono područje nejednačine

$$\frac{6}{x - 2} \geqslant 2x - 3 \qquad (N)$$

e:

$$D = R \setminus \{2\}.$$

Iz (N) dobivamo ekvivalentnu nejednačinu

$$\frac{6}{x-2} - 2x + 3 \geqslant 0,$$

odnosno,

$$\frac{-2x^2 + 7x}{x-2} \geqslant 0. \qquad (N_1)$$

Riješimo je npr. „grafičkim metodom".
Nacrtajmo približno grafike funkcija

$$y = -2x^2 + 7x, \qquad y = x-2.$$

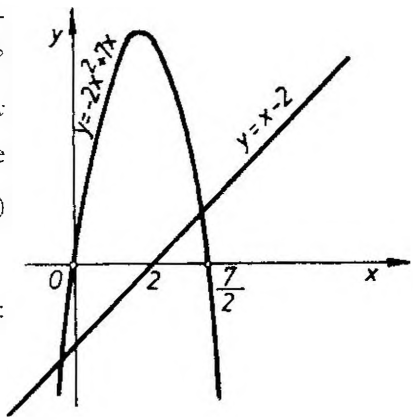
Nule funkcije $y = -2x^2 + 7x$ su 0 i $\frac{7}{2}$;

kako je $a = -2$, tj. $a < 0$, parabola je „okrenuta na dole" (parabola je gledajuć odozgo, konveksna).

Pravac $y = x - 2$ siječe x osu u tački $(2, 0)$, a y osu u tački $(0, -2)$.

Rješenja nejednačine (N_1) su one vrijednosti x za koje su obje funkcije istog znaka, kao i nule funkcije $y = -2x^2 + 7x$.

Sa sl. 36 vidi se da parabola siječe x osu u tačkama 0 i $\frac{7}{2}$; pravac i parabola se nalaze sa iste strane x ose u intervalima $(-\infty, 0)$ i $\left(2, \frac{7}{2}\right)$.



Sl. 36.

Dakle, skup rješenja nejednačine (N) je:

$$\mathcal{R} = (-\infty, 0] \cup \left(2, \frac{7}{2}\right]$$

Rezultat:

$$\mathcal{R} = (-\infty, 0] \cup \left(2, \frac{7}{2}\right]$$

4) Primjenom pravila za stepene i logaritme imamo:

$$x = 10 \cdot 10^{2\left(\frac{1}{2}\log 9 - \log 2\right)} = 10 \cdot 10^{\log 9 - 2\log 2} = 10 \cdot 10^{\log\frac{9}{4}}.$$

Kako je po definiciji logaritma

$$a^{\log_a N} = N$$

to

$$10^{\log\frac{9}{4}} = \frac{9}{4},$$

pa je

$$x = 10 \cdot \frac{9}{4} = \frac{45}{2}.$$

Rezultat: $x = \frac{45}{2}$.

Zadatak smo mogli riješiti i ovako:

i) Logaritmovanjem algebarskog izraza

$$x = 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2}$$

dobivamo

$$\log x = \log (10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2}) = \log (10^{1+\log \frac{9}{4}}) =$$

$$= \left(1 + \log \frac{9}{4}\right) \cdot \log 10 = \log 10 + \log \frac{9}{4} = \log \left(10 \cdot \frac{9}{4}\right) = \log \frac{45}{2},$$

a odatle

$$x = \frac{45}{2}.$$

ii) Pravila logaritmovanja mogli smo primijeniti i na ovaj način:

$$\log x = \log 10 + \left(\frac{1}{2}\log 9 - \log 2\right) \cdot \log 100 = \log 10 + \log 9 - 2\log 2 =$$

$$= \log \frac{10 \cdot 9}{2^2}.$$

Dakle,

$$x = \frac{45}{2}.$$

5) Treba dokazati da data jednakost vrijedi za svaki realan broj α za koji su definisani svi izrazi u toj jednakosti.

Odredimo prvo definiciono područje D te jednakosti.

Kako je

$$\cos 2\alpha - 2\cos\alpha + 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha =$$

$= 2\cos\alpha(\cos\alpha - 1) = -4\cos\alpha \sin^2\frac{\alpha}{2}$ i kako su $\operatorname{tg}\alpha$, odnosno $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ definisani za svako $\alpha \in R$ za koje je $\cos\alpha \neq 0$, odnosno $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$, to je

$$D = \{\alpha \in R\colon \cos\alpha \neq 0,\ \sin\frac{\alpha}{2} \neq 0\} =$$

$$= \{\alpha \in R\colon \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ \alpha \neq 2k\pi\ (k \in Z)\}.$$

Dokažimo sada da za svako $\alpha \in D$ vrijedi data jednakost. Zaista,

$$\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - 2\cos\alpha + 1} = \frac{2\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{-4\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{-4\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1+\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Četvrta smjena

Zadaci:

1) Izračunati vrijednost izraza

$$(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$$

ako je $\quad a = (2+\sqrt{3})^{-1},\ b = (2-\sqrt{3})^{-1}.$

2) Riješiti nejednačinu

$$x + 4 + \frac{13}{x-2} < 0.$$

3) Nacrtati grafik funkcije

$$y = -x^2 + 3x - 2$$

pa zatim riješiti nejednačinu $y \leqslant 0$.

4) Bez upotrebe tablica odrediti x ako je

$$x = 100^{\frac{1}{2} - \log\sqrt[4]{4}}. \qquad \text{(baza je 10)}$$

5) Dokazati:

$$\sin^2(\alpha + 45°) + \sin^2(\alpha - 45°) = 1.$$

Rješenja:

1) i) Dati izraz označimo sa A. Definiciono područje D izraza A je:

$$D = \{a, b\colon a \neq -1,\ b \neq -1\}.$$

Izraz A napišimo u obliku:

$$A = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)}. \qquad (J)$$

Kako je

$(2+\sqrt{3})^{-1}$, $(2-\sqrt{3})^{-1} \in D$, to ima smisla računati vrijednost izraza A za

$$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}, \; b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}.$$

Uvrstimo

$$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}, \; b=\frac{1}{2-\sqrt{3}} \text{ u } \quad (J)$$

Dobićemo:

$$\frac{\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}+2}{\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}+1\right)}=\frac{\frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{\frac{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}=$$

$$=\frac{4+2}{9-3}=1.$$

Rezultat: 1

Zadatak možemo riješiti i ovako:

ii) Direktna zamjena

$$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}, \; b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

u izraz A daje:

$$\frac{1}{\frac{1}{2+\sqrt{3}}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2-\sqrt{3}}+1}=\frac{1}{\frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3}=$$

$$=\frac{6+\sqrt{3}-3+6-\sqrt{3}-3}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

iii) Racionalisanjem nazivnika izraza

$$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}, \quad b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

dobićemo

$$a=2-\sqrt{3}, \; b=2+\sqrt{3}.$$

Kako je

$$a + 1 = 3 - \sqrt{3},\ b + 1 = 3 + \sqrt{3},$$

to je

$$\frac{1}{3 - \sqrt{3}} + \frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{6}{6} = 1$$

tražena vrijednost datog izraza.

2) Definiciono područje D nejednačine

$$x + 4 + \frac{13}{x - 2} < 0 \qquad (N)$$

je skup svih realnih brojeva x za koje je $x - 2 \neq 0$.

Dakle,

$$D = R \setminus \{2\}.$$

Nejednačina (N) je u definicionom području D ekvivalentna sa

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x - 2} < 0 \qquad (N_1)$$

Trinom u brojniku ima diskriminantu $D = -16 < 0$, a pošto je $a = 1 > 0$, taj trinom ima pozitivne vrijednosti za sve $x \in R$. Zato je nejednačina (N_1) ekvivalentna sa

$$x - 2 < 0$$

Skup rješenja nejednačine (N) je, dakle, interval $(-\infty, 2)$.

Rezultat: $(-\infty, 2)$

3) Grafik funkcije

$$y = -x^2 + 3x - 2 \qquad (1)$$

je parabola.

Kako je $D = 9 - 8 > 0$, to za crtanje parabole treba naći: nule date funkcije, tjeme parabole i presjek grafika sa y osom.

Nule zadane funkcije su rješenja jednačine

$$-x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Dakle,

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

Napišemo li formulu

$$y = -x^2 + 3x - 2$$

u obliku

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

dakle,

$$y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

neposredno zaključujemo da su koordinate tjemena T

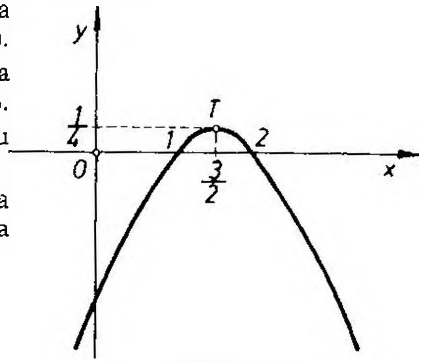
$$x_T = \frac{3}{2} \text{ i } y_T = \frac{1}{4}, \text{ dakle,}$$

$$T\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Presjek grafika sa y osom dobićemo kada u (1) stavimo $x = 0$. Dakle, to je tačka $(0, -2)$.

Pošto je $a < 0$ parabola je „okrenuta na dole" (parabola je gledajući odozgo konveksna).

Sada u sistemu $x0y$ nacrtajmo parabolu $y = -x^2 + 3x - 2$.



Sl. 37.

Napomena: Kako zadana funkcija ima *realne nule*, to smo koordinate x_T i y_T tjemena T mogli naći i ovako:

$$x_T = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

dakle,

$$x_T = \frac{3}{2},$$

a y_T iz jednačine

$$y_T = -\frac{9}{4} + 3 \cdot \frac{3}{2} - 2,$$

dakle,

$$y_T = \frac{1}{4}.$$

Riješimo nejednačinu $y \leqslant 0$!

Sa sl. 37. jasno je da je $y \leqslant 0$ za $x \in \mathcal{R} = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

Rezultat: $\mathcal{R} = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

4) Riješimo zadatak koristeći jednakost

$$a^{\log_a N} = N.$$

Imamo:

$$x = 100^{\frac{1}{2} - \log \sqrt[4]{4}} = 10^{2\left(\frac{1}{2} - \log \sqrt[4]{2^2}\right)} = 10^{1 - \log \sqrt[4]{2^4}} =$$

$$= 10^{\log 10 - \log 2} = 10^{\log 5} = 5.$$

Rezultat: $x = 5$

5) Definiciono područje je $D = R$.

Kako je prema adicionim formulama

$\sin(\alpha + 45^\circ) = \sin\alpha\cos 45^\circ + \sin 45^\circ\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ $(\sin\alpha + \cos\alpha)$,

$\sin(\alpha - 45^\circ) = \sin\alpha\cos 45^\circ - \sin 45^\circ\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)$,

to

$\sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(\alpha - 45^\circ) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)\right]^2 =$

$= \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) + \frac{1}{2}(\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{1}{2}\cdot$ $(\sin^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{1}{2}(2\sin^2\alpha +$ $2\cos^2\alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Peta smjena

Zadaci:

1) Uprostiti izraz

$$\sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-a^2}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-a^2}}\right) \qquad (x > a^2).$$

2) Riješiti sistem nejednačina:

$$2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0$$
$$2 > x^2 + x.$$

3) Izračunati x iz jednačine

$$2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0.$$

4) Riješiti jednačinu

$$\log(a - 2x) - \log(51\,a - 4x) = -2 \qquad (\text{baza je } 10,\ a > 0)$$

5) Dokazati da vrijedi jednakost

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha.$$

Rješenja:

1) Odredimo prvo definiciono područje D datog izraza. Uz uslov $x > a^2$ svi iracionalni izrazi su definisani. Treba još samo pretpostaviti da je $a \neq 0$ jer bi u suprotnom vrijedilo $\sqrt{x} - \sqrt{x - a^2} = 0$, pa izraz

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-a^2}}$$

ne bi bio definisan.

Dakle,

$$D = \{x \in R\colon x > a^2,\ a \neq 0\}.$$

Transformišimo sada dati izraz svođenjem na zajednički nazivnik izraza u zagradama. Dobićemo:

$$\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2})^2-(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2})}=$$

$$=\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\frac{x-2\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}+x-a^2-x-2\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}-x+a^2}{x-x+a^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\frac{-4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}}{a^2}=-\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}\cdot\frac{a^2}{4\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}}=$$

$$=-\frac{a^2}{4(x-a^2)}$$

Rezultat:

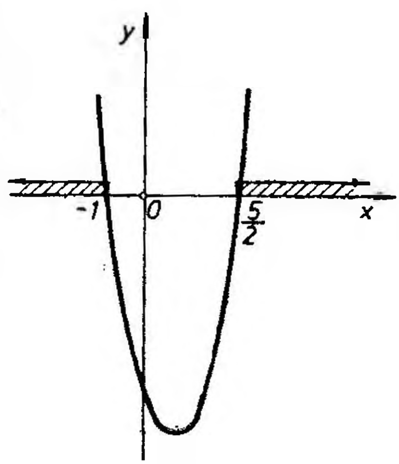
$$\frac{-a^2}{4(x-a^2)}$$

2) Definiciono područje D sistema:

$$\left.\begin{aligned}2x^2-3x-5 &\geqslant 0\ (1)\\ 2 &> x^2+x\ (2)\end{aligned}\right\}\ (S)$$

je $\quad D = R.$

Riješimo najprije prvu nejednačinu sistema (S). Kako je diskriminanta $D = 49 > 0$, to kvadratna funkcija $y = 2x^2 - 3x - 5$ ima realne nule $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{2}$. Pošto je $a = 2 > 0$, to je $2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0$ u intervalima $(-\infty, -1]$ i $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.



Sl. 38.

Prema tome, skup rješenja nejednačine (1) je

$$\mathcal{N}_1 = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

Riješimo sada nejednačinu (2). Ona je ekvivalentna sa nejednačinom

$$x^2 + x - 2 < 0.$$

Nule kvadratne funkcije $y = x^2 + x - 2$ su $x_1 = -2, x_2 = 1$.

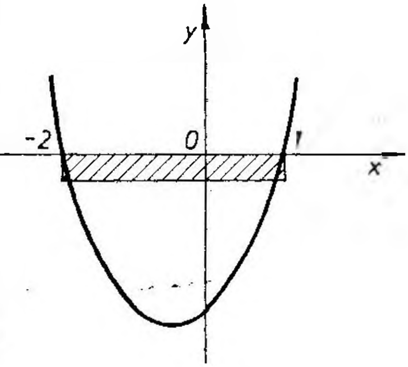
Pošto je $a = 1 > 0$, funkcija ima negativne vrijednosti u intervalu $(-2, 1)$.

Prema tome, skup rješenja nejednačine (2) je

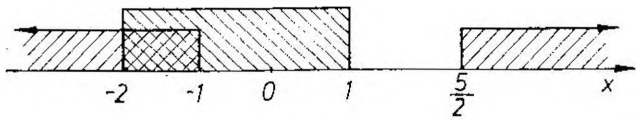
$$\mathcal{N}_2 = (-2, 1).$$

Skup rješenja sistema (S) je skup svih realnih brojeva koji su rješenja i nejednačine (1) i nejednačine (2), dakle $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = (-2, -1]$

Rezultat: $(-2, -1]$.



Sl. 39.



Sl. 40.

3) Definiciono područje D jednačine

$$2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0 \tag{J}$$

je

$$D = [0, +\infty).$$

Uvodeći smjenu $y = \sqrt{x}$ jednačina (J) prelazi u jednačinu

$$2y^2 - 3y - 2 = 0$$

čija su rješenja

$$y = \frac{3 - \sqrt{9 + 16}}{4}, \quad y = \frac{3 + \sqrt{9 + 16}}{4}$$

dakle

$$y = -\frac{1}{2}, \quad y = 2.$$

Kako je zbog $y = \sqrt{x}$, $y \geq 0$, to je

$$y = 2.$$

Iz

$$\sqrt{x} = 2$$

dobijamo

$$x = 4.$$

Rješenje jednačine (J) je $x = 4$.

Rezultat: $x = 4$

4) Odredimo, najprije, definiciono područje D jednačine

$$\log(a-2x)-\log(51a-4x) = -2 \qquad (a > 0). \tag{L}$$

D je rješenje sistema nejednačina

$$a-2x > 0 \wedge 51a-4x > 0.$$

Zato imamo

$$(a-2x > 0) \wedge (51a-4x > 0) \Leftrightarrow \left(x < \frac{a}{2} \wedge x < \frac{51a}{4}\right) \Leftrightarrow x < \frac{a}{2}.$$

Definiciono područje jednačine (L) je: $D = \left(-\infty, \frac{a}{2}\right)$.

Jednačina (L) je u D ekvivalentna jednačini

$$\log \frac{a-2x}{51a-4x} = -2. \tag{L_1}$$

Jednačina (L_1) je po definiciji logaritma ekvivalentna jednačini:

$$10^{-2} = \frac{a-2x}{51a-4x},$$

odnosno jednačini

$$51a-4x = 100a-200x.$$

Rješenje posljednje jednačine je

$$x = \frac{a}{4}.$$

Kako je $\frac{a}{4} \in D$, to je $x = \frac{a}{4}$ rješenje jednačine (L).

Rezultat:

$$x = \frac{a}{4}.$$

5) Definiciono područje D date jednakosti je:

$$D = \{\alpha \in R: \sin\alpha \neq \cos\alpha\} = \{\alpha \in R: \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in Z)\}.$$

Kako je razlika kvadrata

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b), \tag{1}$$

to

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin\alpha - \cos a} \overset{(1)}{=} \frac{(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha} \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha,$$

pa data jednakost vrijedi za svako $\alpha \in D$.

ZADACI NA KVALIFIKACIONOM ISPITU ODRŽANOM 1. SEPTEMBRA 1983. godine

Prva smjena

Zadaci:

1) Uprostiti izraz

$$\frac{x + 2 + \sqrt{x^2 - 4}}{x + 2 - \sqrt{x^2 - 4}} + \frac{x + 2 - \sqrt{x^2 - 4}}{x + 2 + \sqrt{x^2 - 4}}.$$

2) Riješiti jednačinu

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\log 4}{\log 8}.$$

3) Naći sva rješenja jednačine

$$\frac{1}{\cos x} = 2(\sin x + \cos x).$$

4) Riješiti nejednačinu

$$\frac{-x^2 + 13x - 40}{x^2 + 6x + 9} > 0.$$

5) Za koje vrijednosti parametra m jednačina

$$(3m + 1)x^2 - 2x + 2m - 1 = 0$$

ima realna rješenja?

Rješenja:

1) Izraz

$$\frac{x + 2 + \sqrt{x^2 - 4}}{x + 2 - \sqrt{x^2 - 4}} + \frac{x + 2 - \sqrt{x^2 - 4}}{x + 2 - \sqrt{x^2 - 4}}$$

ima smisla za $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ za koje su nazivnici naznačenih razlomaka različiti od nule i podkorjena veličina pozitivna.

Kako je

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{2}$$

$$\sqrt{a^2} = a \text{ za } a > 0, \tag{3}$$

to

$$\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}} + \frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}} =$$

$$= \frac{(x+2+\sqrt{x^2-4})^2 + (x+2-\sqrt{x^2-4})^2}{(x+2-\sqrt{x^2-4})(x+2+\sqrt{x^2-4})} =$$

$$\overset{(1),(2),(3)}{=} \frac{(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x^2-4}+x^2-4+(x+2)^2-2(x+2)\sqrt{x^2-4}+x^2-4}{(x+2)^2-(x^2-4)} =$$

$$= \frac{2(x+2)^2+2(x-2)(x+2)}{(x+2)^2-(x-2)(x+2)} = \frac{2(x+2)(x+2+x-2)}{(x+2)(x+2-x+2)} = \frac{4x}{4} = x.$$

Rezultat: x

2) Jednačina

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\log 4}{\log 8} \tag{J}$$

e eksponencijalna.

Definiciono područje D jednačine (J) je: $D = R$. Riješimo jednačinu (J).

$$(J) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+3} = \frac{\log 2^2}{\log 2^3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-x+3} = \frac{2\log 2}{3\log 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-x+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Leftrightarrow -x+3 = 1 \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Proba:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{27}{8} = \frac{16}{81} \cdot \frac{27}{8} = \frac{2}{3} = \frac{\log 2^2}{\log 2^3} = \frac{\log 4}{\log 8}, \text{ a}$$

ovo je desna strana jednačine (J), pa je ona tačno riješena.

3) Odredimo prvo definiciono područje D date jednačine. Očigledno:

$$D = \{x \in R: \cos x \neq 0\}.$$

Kako je

$$\cos x = 0 \text{ za } x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k \in Z),$$

to je

$$D = \{x \in R: x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\}.$$

Riješimo sada datu jednačinu u skupu D. Množenjem te jednačine sa $\cos x$ dobićemo jednačinu:

$$2(\sin x + \cos x)\cos x = 1,$$

odnosno jednačinu:

$$2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0.$$

Ako iskoristimo trigonometrijske identitete

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

iz posljednje jednačine, dobićemo jednačinu

$$\sin 2x + \cos 2x = 0$$

koja je ekvivalentna sa jednačinom

$$\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0.$$

Primjenom adicionih formula posljednja jednačina prelazi u jednačinu

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

koja je ekvivalentna sa jednačinom

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Dakle, za svako $x \in D$ data jednačina ekvivalentna je sa posljednjom jednačinom čije je opšte rješenje

$$2x - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad (k \in Z),$$

odnosno

$$x = (4k+3)\frac{\pi}{8} \qquad (k \in Z).$$

Kako je za svako $k \in Z$

$$(4k+3)\frac{\pi}{8} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

to je

$$(4k+3)\frac{\pi}{8} \in D,$$

pa su $$x = (4k + 3)\frac{\pi}{8} \qquad (k \in Z)$$

sva rješenja date jednačine.

Rezultat:

$$x = (4k + 3)\frac{\pi}{8} \qquad (k \in Z)$$

Napomena:

Ako nismo odredili definiciono područje date trigonometrijske jednačine, onda treba na kraju zadatka provjeriti, direktnim uvrštavanjem u datu jednačinu, da li su dobijena rješenja stvarno rješenja te jednačine.

4) Odredimo definiciono područje D nejednačine

$$\frac{-x^2 + 13x - 40}{x^2 + 6x + 9} > 0 \qquad \text{(N)}$$

Kako je

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2, \; x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3,$$

to je

$$D = R \setminus \{-3\}.$$

Kako je $(x + 3)^2$ pozitivno za sve realne brojeve x iz D, to je nejednačina (N) ekvivalentna nejednačini

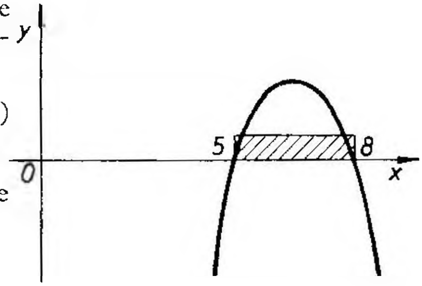
$$-x^2 + 13x - 40 > 0 \qquad (N_1)$$

čije je rješenje interval (5, 8) (sl. 41).

Prema tome, skup rješenja nejednačine (N) je:

$$\mathcal{R} = (5, 8)$$

Rezultat: $\mathcal{R} = (5, 8)$



Sl. 41

5) Rješenja jednačine

$$(3m + 1)x^2 - 2x + 2m - 1 = 0 \qquad \text{(J)}$$

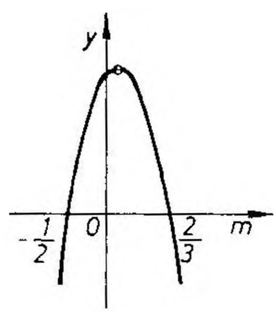
su realna ako je diskriminanta $D \geqslant 0$ tj.

$$4 - 4(3m + 1)(2m - 1) \geqslant 0$$

odnosno,

$$-6m^2 + m + 2 \geqslant 0. \qquad \text{(N)}$$

Rješenje nejednačine (N) je interval $\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ (Sl. 42.)



Sl. 42

Prema tome, rješenja jednačine (J) su realna za

$$m \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right].$$

Rezultat:

$$m \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right].$$

Druga smjena

Zadaci:

1) Uprostiti izraz

$$\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}.$$

2) Riješiti jednačinu

$$3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0.$$

3) Riješiti jednačinu

$$(\sin x+\cos x)^2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

4) Riješiti nejednačinu

$$\frac{-2x^2+9x-5}{x^2+2x-1}<0.$$

5) Odrediti m u sistemu jednačina

$$5m-3y=x-y$$
$$3x+2m=2y+m$$

tako da rješenja sistema zadovoljavaju jednačinu

$$3x-y=6.$$

Rješenja:

1) Izraz

$$\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$$

ima smisla za $a \neq \pm b$.

Kako je

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \tag{1}$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \tag{2}$$

$$\sqrt[2n+1]{ab}=\sqrt[2n+1]{a}\cdot\sqrt[2n+1]{b}, \tag{3}$$

to je

$$\frac{b}{a-b}\cdot\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=$$

$$=\frac{b}{a-b}\cdot\sqrt[3]{(a-b)^2(a-b)(a+b)^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=$$

$$=\frac{b}{a-b}\cdot\sqrt[3]{(a-b)^3}\cdot\sqrt[3]{(a+b)^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=\frac{b}{a-b}(a-b)(a^3-b^3)=$$

$$=b\,(a^3-b^3).$$

Rezultat: $b\,(a^3-b^3)$

2) Definiciono područje D jednačine

$$3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0 \qquad (J)$$

je: $$D=R\setminus\{0\}.$$

Jednačina (J) je u D ekvivalentna jednačini:

$$3\left(\sqrt[x]{9}\right)^2-10\sqrt[x]{9}+3=0 \qquad (J_1)$$

Smjenom

$$y=\sqrt[x]{9} \qquad (y>0)$$

jednačina (J_1) transformiše se u jednačinu

$$3y^2-10y+3=0, \qquad (J_2)$$

čija su rješenja

$$y=3 \text{ i } y=\frac{1}{3}.$$

Oba rješenja zadovoljavaju uslov $y>0$; imamo:

$$\sqrt[x]{9}=3\Leftrightarrow 3^{\frac{2}{x}}=3^1\Leftrightarrow\frac{2}{x}=1\Leftrightarrow x=2.$$

$$\sqrt[x]{9}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3^{\frac{2}{x}}=3^{-1}\Leftrightarrow\frac{2}{x}=-1\Leftrightarrow x=-2.$$

Kako je $x=\pm 2\in D$, to je skup $\mathcal{R}$ rješenja jednačine (J):

$$\mathcal{R}=\{-2,2\}$$

Rezultat: $\mathcal{R}=\{-2,2\}$

3) Definiciono područje date jednačine je skup $D=R$.

Kako je

$$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x,$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\sin x\cos\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=2\left(\sin^2\frac{\pi}{4}\cos^2 x-\cos^2\frac{\pi}{4}\sin^2 x\right)=\cos^2 x-\sin^2 x,$$

data jednačina ekvivalentna je sa jednačinom

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x,$$

odnosno sa jednačinom

$$\sin x\,(\cos x+\sin x)=0.$$

Iz posljednje jednačine slijedi:

$$\sin x=0\ \vee\ \sin x+\cos x=0,$$

odnosno

$$\sin x=0\ \vee\ \sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$$

Dakle,

$$x=k\pi\ (k\in Z)\ \vee\ x=(4k-3)\frac{\pi}{4}\qquad (k\in Z)$$

Kako je $D=R$, ovo su sve rješenja date jednačine.

Rezultat: $x=k\pi\ (k\in Z)$, $x=(4k+3)\dfrac{\pi}{4}\qquad (k\in Z)$

4) Definiciono područje D nejednačine

$$\frac{-2x^2+9x+5}{x^2+2x+1}<0 \qquad \text{(N)}$$

je:

$$D=R\setminus\{-1\}.$$

Nejednačina (N) je u D ekvivalentna sa

$$-2x^2+9x+5<0. \qquad (\text{N}_1)$$

Skup rješenja nejednačine (N) je, prema tome:

$$\mathcal{R}=(-\infty,-1)\cup\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(5,+\infty)$$

Rezultat:

$$\mathcal{R}=(-\infty,-1)\cup\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(5,+\infty)$$

5) Definiciono područje D sistema

$$\left.\begin{array}{l} 5m - 3y = x - y \\ 3x + 2m = 2y - m \end{array}\right\} \quad (S)$$

je: $D = R$.

Sistem (S) napišimo u obliku

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 5m \\ 3x - 2y = -m \end{array}\right\} \quad (S_1)$$

Riješimo li sistem (S_1) metodom „jednakih koeficijenata", dobićemo

$$x = m, \; y = 2m.$$

Kako po uslovu zadatka rješenje sistema zadovoljava jednačinu

$$3x-y = 6,$$

to vrijedi

$$3m-2m = 6$$

dakle,

$$m = 6$$

Rezultat:

$$m = 6$$

Treća smjena

Zadaci

1) Izračunati vrijednost izraza

$$(a + 1)^{-1} + (1 + b)^{-1}$$

ako je

$$a = (2 - \sqrt{3})^{-1}, \; b = (2 - \sqrt{3})^{-1}.$$

2) Riješiti jednačinu

$$2^{x \cdot (x-2)} \cdot 4^{x-2} \cdot (0{,}5)^{x+2} = 1.$$

3) Bez upotrebe tablica odrediti osnovne elemente trougla ako je

$$a = 2\sqrt{2}, \; \alpha = 45°, \; \beta = 120°.$$

(α je ugao nasuprot stranice a)

4) Riješiti sistem nejednačina

$$2x > 3$$

$$7x > 2x^2.$$

5) Ako je površina konusa P, a površina omotača konusa M, odrediti sinus ugla između visine i bočne ivice konusa.

Rješenja:

1) Urađen (vidi prvi zadatak četvrte smjene u junu),

2) Definiciono područje D date jednačine je $D = R$. Riješimo je!

$$2^{x(x-2)} \cdot 4^{x-2} \cdot (0,5)^{x+2} = 1 \Leftrightarrow 2^{x(x-2)} \cdot 2^{2(x-2)} \cdot 2^{-x-2} = 2^{0} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x+2x-4-x-2} =$$

$$= 2^{0} \Leftrightarrow 2^{x^2-x-6} = 2^{0} \Leftrightarrow x^2-x-6 = 0 \Leftrightarrow x = -2,\ x = 3$$

Prema tome, skup rješenja date jednačine je:

$$\mathcal{R} = \{-2, 3\}.$$

Rezultat: $\mathcal{R} = \{-2, 3\}$

3) Odredimo prvo ugao γ.

Kako je

$$\alpha + \beta - \gamma = 180^\circ,$$

to je

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha - \beta) = 15^\circ.$$

Odredimo sada stranice b i c. Prema sinusnoj teoremi iz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

slijedi

$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

pa imamo

$$b = 2\sqrt{2}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{3}.$$

Analogno zaključujemo da je

$$c = 2\,\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

pa da bismo odredili stranicu c, potrebno je naći $\sin\gamma$.

Kako je

$$\sin\gamma = \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1),$$

to je

$$c = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

Rezultat: $\gamma = 15^\circ,\ b = 2\sqrt{3},\ c = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

Napomena:
Stranicu c smo mogli odrediti i primjenom kosinusne teoreme:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Ako zadatak rješavamo na ovaj način, dobije se

$$c = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

To ne treba da nas zbuni jer se lako (kvadriranjem) uvjeravamo da vrijedi

$$\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

4) Definiciono područje D sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2x > 3 \\ 7x > 2x^2 \end{array}\right\} \quad (S)$$

je: $D = R$.

Skup $\mathscr{S}_1$ rješenja prve nejednačine sistema (S) je

$$\mathscr{S}_1 = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Skup $\mathscr{S}_2$ rješenja druge nejednačine sistema (S) je:

$$\mathscr{S}_2 = \left(0, \frac{7}{2}\right).$$

Prema tome, rješenje sistema (S) je:

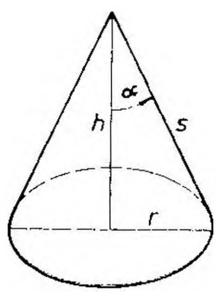
$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Rezultat: $\mathscr{S} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

5) Zadane su površina P i omotač M konusa. Treba odrediti sinus ugla α između visine h i bočne ivice s konusa (sl. 43)

Kako je

$$M = r\pi s \qquad (1)$$



Sl. 43.

$$P = r^2\pi + M \qquad (2),$$

to je

$$\sin\alpha = \frac{r}{S} \overset{(1)}{=} \frac{r}{\frac{M}{r\pi}} = \frac{r^2\pi}{M} \overset{(2)}{=} \frac{P-M}{M}$$

Rezultat:

$$\sin\alpha = \frac{P-M}{M}$$

Četvrta smjena

Zadaci

1) Uprostiti izraz

$$\left(\frac{\sqrt{a+4\sqrt{b}}+\sqrt{a-4\sqrt{b}}}{\sqrt{a+4\sqrt{b}}-\sqrt{a-4\sqrt{b}}}\right)^2 \cdot \frac{1}{(a+\sqrt{a^2-16b})^2} \qquad (a, b > 0; a > 4\sqrt{b})$$

2) Riješiti jednačinu

$$a^{\log(100x)} + b^{1-\log x} \cdot (ab)^{\log(10x)} = a(a+b^2)$$

$$\begin{pmatrix} a,\ b - \text{konstante} \\ 0 < a, \quad b \neq 1 \end{pmatrix}$$

3) Bez upotrebe tablica odrediti ostale uglove trougla kod koga je $a = 3 + \sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 75°$ (α je ugao nasuprot stranice a).

4) Riješiti sistem

$$2x^2 - 5x - 3 > 0$$

$$-3x + 10 < 0.$$

5) Odrediti a tako da grafik funkcije $y = ax^2 - 2x + 2$ dodiruje x osu, a zatim nacrtati grafik funkcije za dobijeno a.

Rješenja:

1) Označimo dati izraz sa A. A je definisan za svako $a, b \in R$ koji zadovoljavaju dati uslov: $a, b > 0$; $a > 4\sqrt{b}$.

Kako je

$$(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (1)$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0) \qquad (3)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \qquad (4)$$

to je

$$A \overset{(3)}{=} \frac{\left(\sqrt{a+4\sqrt{b}}+\sqrt{a-4\sqrt{b}}\right)^2}{\left(\sqrt{a+4\sqrt{b}}-\sqrt{a-4\sqrt{b}}\right)^2}\cdot\frac{1}{(a+\sqrt{a^2-16b})^2}=$$

$$\overset{(1),(4),(2)}{=} \frac{a+4\sqrt{b}+2\sqrt{a^2-16b}+a-4\sqrt{b}}{a+4\sqrt{b}-2\sqrt{a^2-16b}+a-4\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{(a+\sqrt{a^2-16b})^2}=$$

$$=\frac{2(a+\sqrt{a^2-16b})}{2(a-\sqrt{a^2-16b})}\cdot\frac{a+\sqrt{a^2-16b}}{a+\sqrt{a^2-16b}}\cdot\frac{1}{(a+\sqrt{a^2-16b})^2}=$$

$$=\frac{(a+\sqrt{a^2-16b})^2}{a^2-a^2+16b}\cdot\frac{1}{(a+\sqrt{a^2-16b})^2}=\frac{1}{16b}.$$

Rezultat:

$$\frac{1}{16b}$$

2) Definiciono područje D date jednačine je:

$$D=(0,+\infty).$$

Koristeći pravila za logaritme i stepene, dobićemo

$$a^{\log(100x)}+b^{1-\log x}\cdot(ab)^{\log(10x)}=a(a+b^2)\Leftrightarrow a^{\log 100+\log x}+b^{1-\log x}\cdot a^{\log 10+\log x}\cdot$$

$$\cdot\, b^{\log 10+\log x}=a(a+b^2)\Leftrightarrow a^{2+\log x}+b^{1-\log x}\cdot b^{1+\log x}\cdot a^{1+\log x}=a(a+b^2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2\cdot a^{\log x}+ab^2\cdot a^{\log x}=a(a+b^2)\Leftrightarrow a^{\log x}\cdot a(a+b^2)=a(a+b^2)\Leftrightarrow a^{\log x}=$$

$$=1\Leftrightarrow a^{\log x}=a^0\Leftrightarrow \log x=0 \overset{\text{def. logaritma}}{\Longleftrightarrow} x=10^0\Leftrightarrow x=1.$$

Kako je $1\in D$, to je $x=1$ rješenje zadane jednačine.

Rezultat: $x=1$

3) Odredimo prvo ugao β. Prema sinusnoj teoremi je

$$\sin\beta=\frac{b}{a}\sin\alpha,$$

pa treba odrediti $\sin\alpha$.

Kako je

$$\sin\alpha=\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cos 45^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}),$$

imamo

$$\sin\beta = 3\sqrt{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Otuda

$$\beta = 60^\circ.$$

Odredimo još ugao γ.

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 45^\circ.$$

Rezultat:

$$\beta = 60^\circ,\ \gamma = 45^\circ$$

4) Definiciono područje D sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 3 > 0 \\ -3x + 10 < 0 \end{aligned}\right\} \quad (S)$$

je $D = R$.

Skup rješenja prve nejednačine sistema (S) je

$$\mathscr{S}_1 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty),$$

a druge nejednačine sistema (S) je:

$$\mathscr{S}_2 = \left(\frac{10}{3}, +\infty\right).$$

Rješenje sistema (S) je skup

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$$

Dakle,

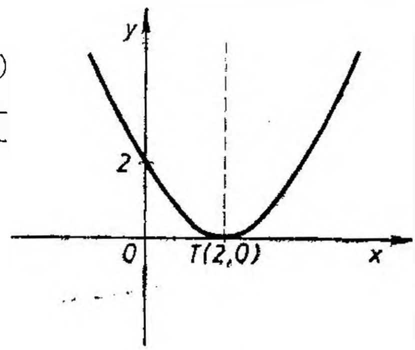
$$\mathscr{S} = \left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$$

Rezultat:

$$\mathscr{S} = \left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$$

5) Grafik funkcije

$$y = ax^2 - 2x + 2 \qquad (a \neq 0)$$



Sl. 44.

je parabola. Ona dira x osu ako je diskriminanta D kvadratnog trinoma $ax^2 - 2x + 2$ jednaka nuli. Kako je

$$D = 0 \Leftrightarrow 4 - 8a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2},$$

to za $a = \frac{1}{2}$ parabola dira x osu.

Nacrtajmo grafik funkcije

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = \frac{1}{2}(x - 2)^2.$$

Nula date funkcije je $x = 2$.

Parabola siječe y osu u tački $(0, 2)$.

Rezultat:

$$a = \frac{1}{2}$$

III DIO

ZADACI SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKOM FAKULTETU U BANJALUCI

ZADACI SA KVALIFIKACIONOG ISPITA ODRŽANOG 29. 6. 1983. godine

1) Zadani su skupovi $A = \{x \in N \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$ i $B = \{x \in N \mid 4 \leqslant x \leqslant 6\}$. Naći relaciju (tj. napisati sve uređene parove):

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid y = x^2\} \subseteq A \times B.$$

2) Izračunati i svesti na najjednostavniji oblik

$$\frac{x^4 - y^4}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{x - y}{xy + y^2}.$$

3) Suma kateta pravouglog trougla iznosi 32 cm. Ako se manja kateta uveća za 4 cm, a veća umanji za 5 cm, površina trougla se ne mijenja. Odrediti stranice trougla.

4) Konstruisati trougao ako je dato: $h_c = 3$ cm, $\alpha = 45°$, $a = 3{,}5$ cm. (h_c je visina iz vrha C, α je ugao nasuprot stranice a).

5) Odrediti broj k tako da jednačina $x^2 - 6x - 2k = 0$ ima oba rješenja pozitivna.

6) Riješiti nejednačinu:

$$2^{3x^2} - 4^{3x} < 0.$$

7) Riješiti jednačinu:

$$\log(x - 1) - \log 4 = \log\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

8) Bez upotrebe tablica odrediti ostale elemente trougla (α, β, γ) ako je zadano $a = b = \sqrt{18}$, $c = 6$.

Rješenja:

1) Kako je

$$A = \{2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

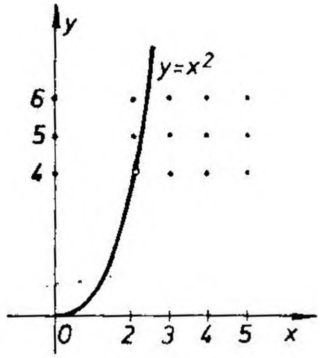
$$A \times B = \{(2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6)\},$$

to je

$$\mathcal{R} = \{(2,4)\}.$$

(Vidi sliku!)

Rezultat: $\mathcal{R} = \{(2,4)\}$



Sl. 45.

2) Odredimo prvo definiciono područje D datog izraza. Kako je:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2, \quad xy + y^2 = y(x+y),$$

to je

$$D = \{x, y: y \neq 0, \ y \neq \pm x\}.$$

Transformišimo sada dati izraz. Imamo:

$$\frac{x^4 - y^4}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{x - y}{xy + y^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x - y)}{(x - y)^2 y (x + y)} =$$

$$= \frac{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)}{(x - y) y (x + y)} = \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

Rezultat:

$$\frac{x^2 + y^2}{y}$$

3) Označimo sa a i b katete pravouglog trougla. Kako je površina P pravouglog trougla data formulom $P = \frac{a \cdot b}{2}$, to prema datim uslovima zadatka slijedi:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 32 \\ (a + 4) \cdot (b - 5) &= a \cdot b \end{aligned}\right\} \quad (S)$$

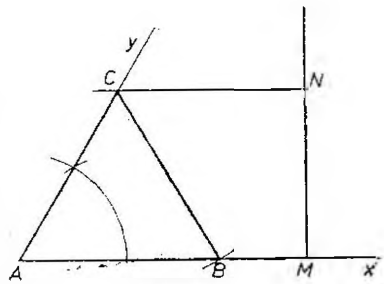
Sistem (S) ekvivalentan je sa sistemom

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 32 \\ -5a + 4b &= 20 \end{aligned}\right\} \quad (S_1)$$

čije je rješenje $\qquad a = 12, \qquad b = 20.$

Rezultat: 12 cm, 20 cm.

4) Najprije ćemo konstruisati ugao $\alpha = \measuredangle xAy = 45°$. U proizvoljnoj tački M poluprave Ax konstruišimo polupravu normalno na polupravu Ax i na nju nanesimo duž $MN = h_c = 3$ cm. Tjeme C trougla ABC je presječna tačka poluprave Ay i prave koja prolazi tačkom N paralelno polupravoj Ax. Tjeme B trougla ABC je presječna tačka kružnice sa centrom u tački C i poluprečnikom $a = 3{,}5$ cm i poluprave Ax.



Sl. 46.

Zadatak ima jedinstveno rješenje. Zašto?

5) Da bi rješenja date kvadratne jednačine bila realna, mora vrijediti:

$$D \geqslant 0.$$

Prema tome,

$$36 - 8k \geqslant 0, \text{ odnosno, } 9 - 2k \geqslant 0.$$

Kako je, osim toga, prema Vijetovim pravilima

$$x_1 + x_2 = 6$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2k,$$

da bi rješenja bila pozitivna k mora zadovoljavati i uslov

$$k > 0.$$

Dakle, k je rješenje sistema nejednačina

$$\left.\begin{aligned} 9 - 2k \geqslant 0 \\ k > 0 \end{aligned}\right\} \quad (S)$$

Skup $\mathcal{S}$ rješenja tog sistema je

$$\mathcal{S} = \left(0, \frac{9}{2}\right].$$

Rješenja date jednačine će, prema tome, biti pozitivna za

$$k \in \left(0, \frac{9}{2}\right].$$

Rezultat:

$$k \in \left(0, \frac{9}{2}\right]$$

6) Definiciono područje D date nejednačine je $D = R$. Riješimo je!

$$2^{3x^2} - 4^{3x} < 0 \Leftrightarrow 2^{3x^2} < 2^{6x} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 3x^2 < 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$$

((*) baza je $2 > 1$)

Rezultat:

$$x \in (0, 2)$$

7) Definiciono područje D date jednačine je

$$D = (1, +\infty).$$

Ta jednačina je u D ekvivalentna jednačini

$$\log \frac{(x-1)}{4} = \log\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

odnosno jednačini

$$\frac{x-1}{4} = x + \frac{1}{2}$$

čije je rješenje

$$x = -1.$$

Kako $-1 \notin D$, to data jednačina nema rješenja.

Rezultat: Jednačina nema rješenja.

8) Prema kosinusnoj teoremi

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab},$$

pa je

$$\cos\gamma = \frac{18 + 18 - 36}{36} = 0.$$

Otuda,

$$\gamma = \frac{\pi}{2},$$

Kako je, osim toga, trougao jednokraki, to je

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Rezultat:

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}, \qquad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

ZADACI SA KVALIFIKACIONOG ISPITA ODRŽANOG 29. 8. 1983. godine.

1) Rastaviti na proste činioce izraz: $a^5 - a^4 - a^2 + a$.

2) Izračunati vrijednost izraza

$$x^{\frac{5}{6}} : \sqrt[-2]{x} \qquad \text{ako je} \qquad x = 27.$$

3) Koliki su kraci jednakokrakog trougla kome je osnovica 36 cm, a krak za 6 cm duži od visine na osnovicu?

4) Konstruisati jednakostranični trougao ako je data visina $h = 3$ cm. Izračunati površinu kruga upisanog tom trouglu.

5) Odrediti skup svih rješenja nejednačine:

$$2x^2 + 5x - 3 < 0.$$

6) Odrediti područje definisanosti logaritma i riješiti jednačinu:

$$\log_2 \left(12 - \frac{x}{2}\right) = 3.$$

7) Riješiti jednačinu

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{11x-3x^2} = 16.$$

8) Dokazati tačnost identiteta:

$$\frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x} = 1 - \sin x.$$

Rješenja:

1) $a^5 - a^4 - a^2 + a = a^5 - a^2 - (a^4 - a) = a^2(a^3 - 1) - a(a^3 - 1) =$

$= a(a^3 - 1)(a - 1) = a(a - 1)^2 \cdot (a^2 + a + 1).$

Rezultat:

$$a(a-1)^2 \cdot (a^2 + a + 1)$$

2) Definiciono područje D datog izraza je $D = (0, +\infty)$.

Transformišimo dati izraz. Imamo:

$$x^{\frac{5}{6}} : \sqrt{x}^{-2} = x^{\frac{5}{6}} : x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{6}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{8}{6}} = x^{\frac{4}{3}} = x \cdot \sqrt[3]{x}.$$

Vijednost tog izraza za $x = 27$ je

$$27 \cdot \sqrt[3]{27} = 27 \cdot 3 = 81.$$

Rezultat: 81

3) Prema uslovu zadatka je

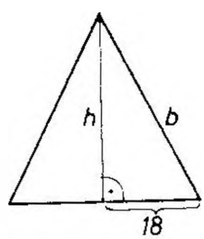
$$h + 6 = b. \qquad (1)$$

Primjenom Pitagorinog pravila (Vidi skicu!) dobijamo:

$$b^2 = h^2 + 324 \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$b^2 = (b - 6)^2 + 324,$$



Sl. 47.

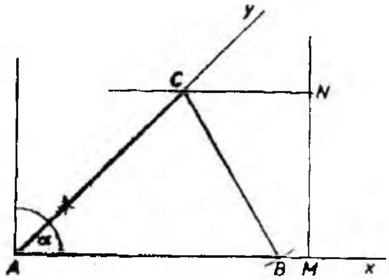
odnosno,

$$b^2 = b^2 - 12b + 36 + 324.$$

Dakle,

$$b = 30.$$

Rezultat: 30 cm.



Sl. 48.

4) Kako su unutrašnji uglovi u jednakostraničnom trouglu jednaki 60°, to najprije konstruišemo ugao $\sphericalangle\, xAy = 60°$. U proizvoljnoj tački M poluprave Ax konstruišimo polupravu normalno na polupravu Ax i na nju nanesimo duž $\overline{MN} = h = 3$ cm. Tjeme C trougla ABC je presječna tačka poluprave Ay i prave koja prolazi tačkom N paralelno Ax. Tjeme B je presječna tačka kružnice sa centrom u tački C i poluprečnikom $a = \overline{AC}$ i poluprave Ax.

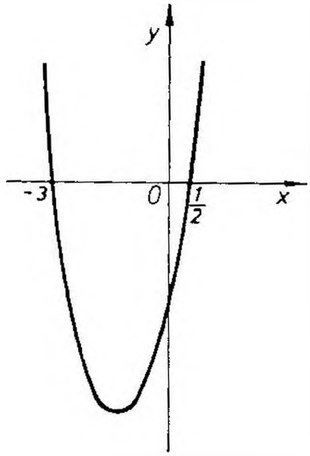
Zadatak ima jedinstveno rješenje. Zašto?.

Kako je poluprečnik r kružnice upisane tom trouglu

$$r = \frac{1}{3} h = 1,$$

to je površina P tog kruga

$$P = r^2 \pi = \pi.$$



Sl. 49.

5) Diskriminanta D kvadratne funkcije

$$y = 2x^2 + 5x - 3$$

je

$$D = 25 + 24 = 49 > 0$$

pa funkcija ima realne nule:

$$x_1 = -3, \qquad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Kako je $a = 2 > 0$, to funkcija ima minimum.

Skup $\mathcal{S}$ rješenja date nejednačine je

$$\mathcal{S} = \left(-3, \frac{1}{2}\right).$$

(Vidi sliku!)

Rezultat: $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$

6) Definiciono područje D date jednačine je

$$D = \{x \in R: \quad 12 - \frac{x}{2} > 0\} = (-\infty, 24).$$

Data jednačina je u D ekvivalentna jednačini:

$$12 - \frac{x}{2} = 2^3$$

čije je rješenje

$$x = 8.$$

Kako je $8 \in D$, to je $x = 8$ rješenje date jednačine.

Rezultat:

$$x = 8$$

7) Definiciono područje D date jednačine je $D = R$. Riješimo je!

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{11x-3x^2} = 16 \Leftrightarrow 2^{3x^2-11x} = 2^4 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x = 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 4 \vee x = -\frac{1}{3}\right)$$

Rezultat:

$$x = 4, \; x = -\frac{1}{3}$$

8) Odredimo prvo definiciono područje D datog trigonometrijskog identiteta. Kako je

$$\cos x = 0 \text{ za } x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \qquad (k \in Z),$$

$$1 + \sin x = 0 \text{ za } x = 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in Z),$$

to je

$$D = \{x \in R: \quad x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad (k \in Z)\}.$$

Dokažimo sada da za svako $x \in D$ vrijedi dati identitet.

Imamo:

$$\frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} =$$

$$= \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 1 - \sin x.$$

ZADACI SA KVALIFIKACIONOG ISPITA ODRŽANOG 6. 9. 1983. godine.

1) Uprostiti izraz

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}.$$

2) Polovina nekog broja je za 4 veća od njegove trećine. Koji je to broj?

3) Obim jednakokrakog trougla iznosi 19 cm, a razlika kraka i osnovice je 2 cm. Nadite osnovicu i krak.

4) Za koje vrijednosti parametra m je funkcija

$$y = mx^2 - x - 1$$

negativna za sve x?

5) Riješiti jednačinu: $\left(\sqrt[5]{\frac{1}{3}}\right)^x = 9.$

6) Izračunaj $\log_3(\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{81})$.

7) Izračunati $\operatorname{tg} x$ ako je $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

8) Bez upotrebe tablica izračunati $\sin 105°$.

Rješenja:

1) Odredimo prvo definiciono područje D datog izraza.

Kako je

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab},$$

to je

$$D = \{a, b: \quad a, b \neq 0, \quad a \neq -b\}.$$

Transformišimo sada dati izraz. Imamo:

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2} = \frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{(a+b)^2}{ab}} = \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Rezultat:

$$\frac{a-b}{a+b} \quad (a, b \neq 0, \quad a \neq -b)$$

2) Označimo sa x traženi broj. Prema uslovima zadatka x je rješenje jednačine:

$$\frac{x}{2} - 4 = \frac{x}{3}$$

Dakle,

$$x = 24.$$

Rezultat:

$$24$$

3) Označimo sa a dužinu osnovice, a sa b dužinu kraka jednokrakog trougla. Prema uslovima zadatka a i b zadovoljavaju sistem jednačina:

$$\left.\begin{aligned} a + 2b &= 19 \\ b - a &= 2 \end{aligned}\right\}$$

čije je rješenje

$$a = 5, \quad b = 7.$$

Rezultat: dužina osnovice je 5 cm, a dužina kraka 7 cm.

4) Kako je za $a < 0$, $D < 0$ kvadratna funkcija $y = ax^2 + bx - c$ negativna za svako $x \in R$, to je m rješenje sistema nejednačina

$$\left.\begin{aligned} m &< 0 \\ 1 + 4m &< 0. \end{aligned}\right\}$$

Dakle,

$$m < -\frac{1}{4}.$$

Rezultat:

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$$

5) Definiciono područje D date jednačine je $D = R$.
Riješimo je!

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{3}}\right)^x = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{5}} = 3^2 \Leftrightarrow 3^{-\frac{x}{5}} = 3^2 \Leftrightarrow -\frac{x}{5} = 2 \Leftrightarrow x = -10$$

Rezultat:

$$x = -10$$

6) $\log_3(\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{81}) = \log_3(3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{4}{3}}) = \log_3 3^{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}} = \log_3 3^{\frac{25}{12}} = \frac{25}{12}$

Rezultat: $\frac{25}{12}$

7) Kako je

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\mp\sqrt{1-\sin^2 x}}, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

to za $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ imamo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\frac{1}{5}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}.$$

Rezultat:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$$

8) Kako je

$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ,$$

to je, prema adicionim formulama, $\sin 105^\circ = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

Rezultat: $\quad \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

IV DIO

ZADACI SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKOM FAKULTETU U MOSTARU

ZADACI SA KVALIFIKACIONOG ISPITA ODRŽANOG 29. 6. 1983. godine.

1) Pročitati (iskazati riječima) slijedeće formule:

a) $(\forall x, y \in Q)\ [x < y \Rightarrow (\exists z \in Q)\,(x < z \wedge z < y)]$.

Ovdje je Q skup racionalnih brojeva.

b) $\neg\,(\exists x \in R)\, x^2 = -1$.

Ovdje je R skup realnih brojeva.

2) Izračunati

$$\frac{a+b}{a^2-ab} - \frac{a-b}{ab} - \frac{2}{a-b}.$$

3) Riješiti nejednačinu:

$$\frac{x-5}{x-1} > 0.$$

4) Riješiti jednačinu:

$$x^{2\log x - 5} = 0{,}01.$$

5) U jednačini

$$x^2 - 9x + c = 0$$

odrediti c tako da je jedno rješenje te jednačine dva puta veće od drugog. Za tako nađeno c nacrtati grafik funkcije $y = x^2 - 9x + c$.

6) Dokazati da je $n^2 + 3n - 4$ paran broj ($n > 1$ prirodan broj).

7) a) Koje su značajne tačke trougla?
   b) Kako se dobijaju?
   c) Dokazati osobinu jedne od njih.

8) a) Kada su dva trougla podudarna, a kada slična?
   b) Navesti stavove o podudarnosti trouglova.

9) Ako je $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, izračunati vrijednost izraza:

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{ctg} x} - \frac{3}{28}.$$

10) Riješiti jednačinu:

$$\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos x = 3.$$

Rješenja:

1) a) Za svaka dva racionalna broja x, y, $x < y$ postoji racionalan broj z takav da vrijedi $x < z$ i $z < y$.

b) Ne postoji realan broj x takav da vrijedi $x^2 = -1$.

2) Definiciono područje D datog izraza je

$$D = \{a, b:\ a, b \neq 0,\ a \neq b\}.$$

Transformišimo dati izraz. Imamo:

$$\frac{a-b}{a^2-ab} - \frac{a-b}{ab} - \frac{2}{a-b} = \frac{a+b}{a(a-b)} - \frac{a-b}{a \cdot b} - \frac{2}{a-b} =$$

$$= \frac{b(a+b) - (a-b)^2 - 2ab}{ab(a-b)} = \frac{ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 - 2ab}{ab(a-b)} =$$

$$= \frac{ab - a^2}{ab(a-b)} = -\frac{a(a-b)}{ab(a-b)} = -\frac{1}{b}.$$

Rezultat: $-\frac{1}{b}$ $\quad (a, b \neq 0,\ a \neq b)$

3) Rezultat: $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$

4) Definiciono područje D date jednačine je

$$D = (0, +\infty).$$

Riješimo sada datu jednačinu. Logaritmiranjem po bazi 10 dobijamo jednačinu:

$$\log x^{2\log x - 5} = \log 10^{-2},$$

odnosno jednačinu

$$(2\log x - 5)\log x = -2$$

koja je ekvivalentna sa jednačinom

$$2\log^2 x - 5\log x + 2 = 0.$$

Posljednja jednačina smjenom $y = \log x$ prelazi u jednačinu

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

čija su rješenja

$$y_1 = -\frac{1}{2}, \; y_2 = 2.$$

Dakle,

$$\log x = -\frac{1}{2} \vee \log x = 2,$$

odnosno,

$$x = \sqrt{10} \vee x = 10^2.$$

Kako je $\sqrt{10}$, $10^2 \in D$, to su $x = \sqrt{10}$ i $x = 100$ rješenja date jednačine.

Rezultat: $x = \sqrt{10}$, $x = 100$.

5) Neka su x_1 i x_2 rješenja date jednačine i neka je

$$x_2 = 2x_1 \qquad (1)$$

Prema Vijetovim pravilima vrijedi

$$x_1 + x_2 = 9 \qquad (2)$$

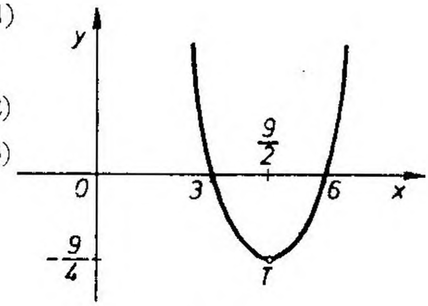
$$x_1 \cdot x_2 = c \qquad (3)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$x_1 = 3, \; x_2 = 6,$$

pa je prema (3)

$$c = 18.$$



Sl. 50.

Nacrtajmo sada grafik funkcije

$$y = x^2 - 9x + 18$$

Kako je

$$y = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

grafik te funkcije je parabola čije je tjeme $T\left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ (Vidi sliku!)

Rezultat: $c = 18$

6) Dati izraz možemo napisati u obliku

$$n^2 + 3n - 4 = n^2 - 1 + 3n - 3 = (n-1)(n+1) + 3(n-1) = (n-1)(n+4)$$

i) Ako je n paran broj, tada je $n + 4$ paran broj, pa je i $n^2 + 3n - 4$ paran broj.

ii) Ako je n neparan broj, tada je $n - 1$ paran broj, pa je $n^2 + 3n - 4$ paran broj.

Napomena: Zadatak smo mogli riješiti i metodom matematičke indukcije.

Zaista je:

i) Tvrdnja je tačna za prirodan broj $n = 2$ jer je

$$4 + 6 - 4 = 6$$

paran broj.

ii) Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za neki prirodan broj $n = k \geq 2$, tj. pretpostavimo da vrijedi

$$k^2 + 3k - 4 = 2p \quad (p \in N)(1)$$

i dokažimo da je tvrdnja tačna i za $n = k + 1$.

Imamo:

$$(k + 1)^2 + 3(k + 1) - 4 = k^2 + 2k + 1 + 3k + 3 - 4 = k^2 + 3k - 4 + 2(k + 2) \overset{(1)}{=} 2p + 2(k + 2) = 2(p + k + 2) \quad \text{(paran broj)}$$

7) a) Značajne tačke trougla su: težište, ortocentar, centar opisanog kruga, centar upisanog kruga.

b) Težište je tačka u kojoj se sijeku težišnice trougla.

Ortocentar je tačka u kojoj se sijeku prave koje sadrže visine trougla.

Centar upisanog kruga je tačka u kojoj se sijeku simetrale uglova trougla.

Centar opisanog kruga je tačka u kojoj se sijeku simetrale stranica trougla.

c) Teorema o težištu i težišnicama trougla.

Težišnice trougla sijeku se u jednoj tački — težištu trougla. Težište dijeli težišnicu na dva dijela tako da je udaljenost od vrha trougla do težišta jednaka $\frac{2}{3}$ dužine te težišnice.

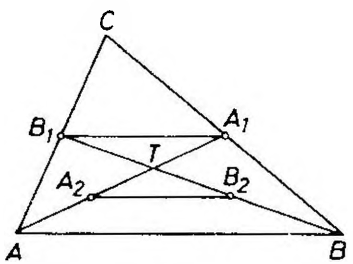
Dokaz:

Neka je T presječna tačka težišnica $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ (Vidi sl. 51.). Kako je $\overline{A_1B_1}$ srednja linija trougla ABC, to je

$$\overline{A_1B_1} \parallel \overline{AB} \quad \text{i} \quad \overline{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overline{AB} \qquad (1)$$

Neka je A_2 sredina stranice AT, a B_2 sredina stranice BT trougla ABT. Duž $\overline{A_2B_2}$ je srednja linija trougla ABT, pa je

$$\overline{A_2B_2} \parallel \overline{AB} \text{ i } \overline{A_2B_2} = \frac{1}{2}\overline{AB} \qquad (2).$$



Sl. 51.

Iz (1) i (2) slijedi

$$\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2} \text{ i } \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}.$$

Posmatrajmo trouglove A_1B_1T i A_2B_2T. Za njih vrijedi

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2, \ \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2, \ \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2},$$

pa su ti trouglovi podudarni. Odatle slijedi:

$$\overline{TA_1} = \overline{TA_2},\ \overline{TB_1} = \overline{TB_2}.$$

Dakle,

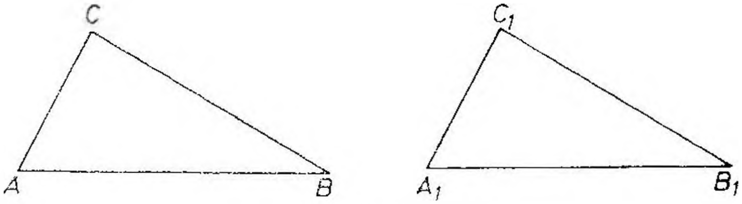
$$\overline{TA} = 2\,\overline{TA_1},\ \overline{TB} = 2\,\overline{TB_1}.$$

Slično, presječna tačka T_1 težišnica $\overline{AA_1}$ i $\overline{CC_1}$ dijeli duž $\overline{AA_1}$ tako da vrijedi $\overline{T_1A} = 2\,\overline{T_1A_1}$.

Kako postoji tačno jedna tačka koja dijeli duž $\overline{AA_1}$ u određenom omjeru, to je $T_1 \equiv T$.

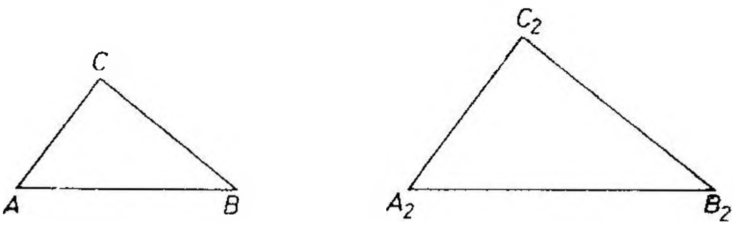
Napomena: Teorema se vrlo jednostavno dokazuje pomoću vektora.

8) a.) Dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ (Sl. 52.) su podudarna (oznaka: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$) ako i samo ako $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, $\overline{CA} = \overline{C_1A_1}$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$.



Sl. 52.

Dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A_2B_2C_2$ (Sl. 53) su slična (oznaka: $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$) ako i samo ako $\sphericalangle A = \sphericalangle A_2$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_2$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_2$.



Sl. 53.

b) Stavovi o podudarnosti trouglova

1) $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow (\overline{AB} = \overline{A_1B_1} \wedge \sphericalangle A = \sphericalangle A_1 \wedge \overline{AC} = \overline{A_1C_1})$

2) $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow (\overline{AB} = \overline{A_1B_1} \wedge \sphericalangle A = \sphericalangle A_1 \wedge \sphericalangle B = \sphericalangle B_1$

3) $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow (\overline{AB} = \overline{A_1B_1} \wedge \overline{BC} = \overline{B_1C_1} \wedge \overline{AC} = \overline{A_1C_1})$

4) $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow (\overline{AB} = \overline{A_1B_1} \wedge \overline{BC} = \overline{B_1C_1} \wedge \sphericalangle C = \sphericalangle C_1 \wedge \overline{AB} > \overline{BC})$

9) Odredimo prvo definiciono područje D funkcije f. D je skup svih $x \in R$ za koje su definisani $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ i za koje je $\operatorname{ctg} x \neq -1$.

Dakle,

$$D = \{x \in R\colon \sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \operatorname{ctg} x \neq -1\} = \{x \in R\colon x \neq k\pi, x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi\ (k \in Z)\},$$

tj.

$$D = \{x \in R\colon x \neq k\frac{\pi}{2}, x \neq (4k + 3)\frac{\pi}{4}\ (k \in Z)\}.$$

Ako je $\sin x = \frac{3}{5}\left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, tada je $x \in D$ i vrijedi

$$\sin x = \frac{3}{5}, \cos x = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg} x = \frac{4}{3},$$

pa je

$$\frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{4}{3}} - \frac{3}{28} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{3}} - \frac{3}{28} = \frac{3}{28} - \frac{3}{28} = 0$$

tražena vrijednost funkcije.

Rezultat: 0

10) Definiciono područje D date jednačine je $D = R$. Data jednačina ekvivalentna je sa jednačinom

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0,$$

odnosno sa jednačinom

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Posljednja jednačina smjenom $y = \cos x$ prelazi u jednačinu

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

čija su rješenja

$$y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$\cos x = -1 \vee \cos x = \frac{1}{2}$$

odnosno

$$x = (2k+1)\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in Z).$$

Rezultat: $x = (2k+1)\pi,\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

ZADACI SA KVALIFIKACIONOG ISPITA ODRŽANOG 1. 9. 1983. godine

1) Ako je $P = \{x \in N \mid x \leqslant 10\}$; $S = \{x \in Z \mid -3 < x < 7\}$, odrediti $P \cup S$; $P \cap S$ i $S \setminus P$.

2) Naći skup rješenja nejednačine:

$$\frac{10-x}{x-2} > 1.$$

3) Izračunati:

$$\frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y}\left(\frac{x+y}{5x} - x - y\right).$$

4) Odrediti parametar k tako da funkcija $f(x) = x^2 + (k+2)x - 2k + 1$ ima dvostruku nulu. Za veću vrijednost parametra nacrtati grafik.

5) Urediti obzirom na relaciju „<" skup brojeva

$$\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}\right\}.$$

6) Koji razlomak dobija vrijednost 2 ako mu se brojnik i nazivnik uveća za 3, a dobija vrijednost $\frac{1}{2}$ ako brojnik umanjimo, a nazivnik uvećamo za 5.

7) Riješiti jednačinu:

$$2\sin(2x) - 1 = 0.$$

8) Dokazati identitet:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \cos x.$$

9) Riješiti jednačinu:

$$(\log y)^2 - 2\log y = 15.$$

10) a) Objasniti šta je unutrašnji, a šta vanjski ugao trougla?

b) Kakva veza postoji između vanjskog i unutrašnjeg ugla trougla?

c) Formulisati i dokazati teoremu o unutrašnjim uglovima trougla.

Rješenja:

1) Kako je

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

to je

$$P \cup S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$P \cap S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S \setminus P = \{-2, -1, 0\}.$$

2) Definiciono područje D date nejednačine je:

$$D = R \setminus \{2\}.$$

Data nejednačina je u D ekvivalentna nejednačini

$$\frac{12 - 2x}{x - 2} > 0,$$

odnosno nejednačini

$$\frac{6 - x}{x - 2} > 0$$

čije rješenje je skup

$$\mathcal{A}' = (2, 6)$$

Rezultat: $(2, 6)$

3) Definiciono područje D algebarskog izraza

$$\frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y}\left(\frac{x+y}{5x} - x - y\right) \qquad (J)$$

je

$$D = \{x, y:\ x \neq 0,\ x \neq -y\}.$$

Transformišimo sada izraz (J). Imamo:

$$\frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y}\left(\frac{x+y}{5x} - x - y\right) = \frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y}\cdot\frac{x+y-5x(x+y)}{5x} =$$

$$= \frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y}\cdot\frac{(x+y)(1-5x)}{5x} = \frac{3}{5x}\cdot(1 - 1 + 5x) = 3.$$

Rezultat: $3\ (x \neq 0,\ x \neq -y)$

4) Da bi funkcija imala dvostruku nulu, potrebno je, i dovoljno, da je $D = 0$.

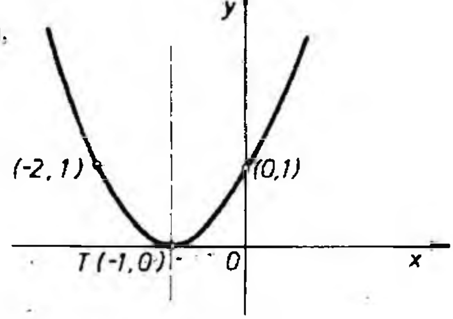
Kako je

$D = (k + 2)^2 - 4(-2k + 1) = k^2 + 12k,$
to je k rješenje jednačine

$$k^2 + 12k = 0,$$

dakle,

$$k = 0 \lor k = -12.$$



Sl. 54.

Za $k = 0$ imamo funkciju

$$f(x) = x^2 - 2x + 1,$$

odnosno

$$f(x) = (x + 1)^2$$

čiji je grafik parabola tjemena $T(-1, 0)$; presjek grafika i y-ose je tačka $(0, 1)$. Kako je grafik simetričan u odnosu na pravu $x = -1$, to naznačimo i tačku grafika simetričnu tački $(0, 1)$, pa nacrtajmo grafik date funkcije (vidi sl. 54).

5) Kako je

$$\frac{2}{3} = \frac{30}{45}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{27}{45}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{25}{45},$$

zaključujemo da je $\frac{5}{9}$ prethodnik broja $\frac{3}{5}$, a $\frac{3}{5}$ prethodnik broja $\frac{2}{3}$ s obzirom na relaciju „<" odnosno,

$$\frac{5}{9} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}.$$

Rezultat:

$$\frac{5}{9} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$$

6) Označimo sa x, odnosno sa y, brojnik, odnosno nazivnik razlomka. Prema uslovima zadatka imamo

$$\frac{x + 3}{y + 3} = 2$$

$$\frac{x - 5}{y + 5} = \frac{1}{2},$$

odakle slijedi sistem linearnih jednačina

$$\left.\begin{aligned} x-2y &= 3 \\ 2x-y &= 15 \end{aligned}\right\}$$

čije je rješenje

$$x = 9,\ y = 3$$

Rezultat: $\frac{9}{3}$

7) Jednačina

$$2\sin 2x - 1 = 0$$

definisana je za svako $x \in R$ i ekvivalentna je jednačini

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

čija su rješenja

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad (k \in Z),$$

odnosno,

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad (k \in Z).$$

Rezultat:

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad (k \in Z)$$

8) Definiciono područje D datog trigonometrijskog identiteta je

$$D = \{x \in R \colon \frac{x}{2} \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in Z\} = \{x \in R \colon x \neq (2k+1)\pi,\ k \in Z\}.$$

Dokažimo sada da za svako $x \in D$ vrijedi dati identitet.

Imamo:

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x.$$

9) Definiciono područje D jednačine

$$(\log y)^2 - 2 \log y = 15 \qquad (J)$$

je

$$D = (0, +\infty).$$

Jednačina (J) je u D ekvivalentna jednačini

$$(\log y)^2 - 2 \log y - 15 = 0.$$

Smjenom $\log y = z$ dobijamo jednačinu

$$z^2 - 2z - 15 = 0 \qquad (J_1)$$

čija su rješenja

$$z_1 = -3, \; z_2 = 5.$$

Iz

$$\log y = -3, \text{ odnosno, } \log y = 5$$

po definiciji logaritma dobijamo

$$y = 10^{-3}, \text{ odnosno, } y = 10^5.$$

Kako je

$$10^{-3} \in D, \text{ odnosno, } 10^5 \in D,$$

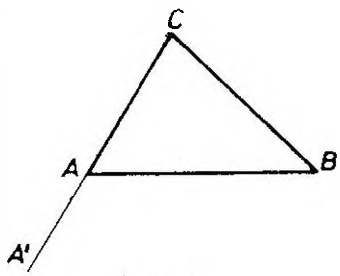
to su

$$y = 10^{-3}, \; y = 10^5$$

rješenja jednačine (J).

Rezultat: 10^{-3}, 10^5

10) a) Unutrašnjim uglom trougla pri vrhu A zovemo ugao $\sphericalangle BAC$ (Sl. 55). Vanjskim uglom trougla pri vrhu A zovemo ugao $\sphericalangle A'AB$ (sl. 55.)



Sl. 55.

b) Zbir unutašnjeg i vanjskog ugla trougla je 180°.

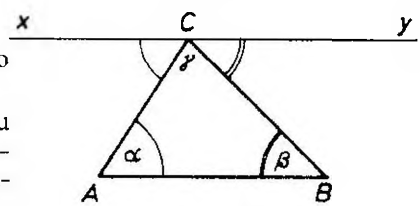
c) Teorema o unutrašnjim uglovima trougla.

Zbir unutrašnjih uglova u trouglu iznosi 180°.

Dokaz:

Kroz tjeme C trougla ABC povucimo pravu xCy paralelnu sa stranicom AB.

Ugao $\sphericalangle ACx$ jednak je unutrašnjem uglu α sa tjemenom u tački A, a ugao $\sphericalangle BCy$ jednak je unutrašnjem uglu β sa tjemenom u tački B (vidi sl. 56). (U oba slučaja imamo parove naizmjeničnih uglova).



Sl. 56.

Opruženi ugao $\sphericalangle\, xCy$ je, prema tome, zbir unutrašnjih uglova trougla, tj.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Posljedica: Spoljašnji ugao trougla jednak je zbiru dva njemu nenaporedna unutrašnja ugla trougla.

ZADACI SA KVALIFIKACIONOG ISPITA ODRŽANOG 7. 9. 1983. godine

1) Izračunati

$$(-0{,}5)^{-1} \cdot 3^{2} + \frac{1}{3^{-1}}.$$

2) Uprostiti:

$$\left(\frac{1}{a-b} - \frac{a}{a^2-b^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).$$

3) Riješiti nejednačinu

$$\frac{2x}{x+1} - 2 < \frac{3}{x+1}.$$

4) Dati su skupovi:

$$A = \{x \in N \mid x \leqslant 4\} \text{ i } B = \{x \in N \mid 3 < x < 7\}.$$

Odrediti:

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \times B.$$

5) Riješiti jednačinu

$$4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0.$$

6) Tetiva kružnice ima dužinu 30 cm, a njena udaljenost od središta kružnice je za 9 cm manja od poluprečnika. Koliki je poluprečnik kružnice?

7) U jednačini

$$x^2 + (m-1)\,x + 9 = 0$$

naći m tako da bude $x_1 = x_2$. Za tako nađeno m riješiti jednačinu.

8) a) Definisati pojam periferijskog i centralnog ugla u krugu.

b) Navesti teoremu o odnosu periferijskog i centralnog ugla.

9) Odrediti ostale elemente i površinu pravouglog trougla kod kojeg je hipotenuza 5 cm i jedan ugao 30°.

10) Riješiti trigonometrijsku jednačinu:

$$3\,\mathrm{tg}\,(2x) - \sqrt{3} = 0.$$

Rješenja:

1) $$(-0{,}5)^{-1}\cdot 3^{0}+\frac{1}{3^{-1}}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}-3=-2+3=1.$$

Rezultat: 1

2) Odredimo prvo definiciono područje D datog izraza.
Očigledno:

$$D=\{a,b\colon a\neq\pm b,\ a,\ b\neq 0\}.$$

Transformišimo sada dati izraz. Imamo:

$$\left(\frac{1}{a-b}-\frac{a}{a^2-b^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a-b}-\frac{a}{(a-b)(a+b)}\right)\cdot\frac{a-b}{a\cdot b}=$$

$$=\frac{a+b-a}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a-b}{a\cdot b}=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{1}{ab}=\frac{1}{a(a+b)}.$$

Rezultat:

$$\frac{1}{a(a+b)}\qquad (a,\ b\neq 0,\qquad a\neq\pm b)$$

3) Odredimo prvo definiciono područje D date nejednačine.
Očigledno:

$$D=\{x\in R\colon x\neq -1\}.$$

Riješimo sada nejednačinu.

$$\frac{2x}{x+1}-2<\frac{3}{x+1}\Leftrightarrow\frac{3}{x+1}-\frac{2x}{x+1}+2>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3-2x+2x+2}{x+1}>0\Leftrightarrow\frac{5}{x+1}>0\Leftrightarrow x+1>0\Leftrightarrow x>-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-1,+\infty)$$

Kako je $(-1,+\infty)\subset D$, to je $(-1,+\infty)$ skup rješenja date nejednačine.
Rezultat:

$$x\in(-1,+\infty)$$

4) Kako je

$$A=\{1,2,3,4\},\quad B=\{4,5,6\},$$

to je

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A\cap B=\{4\}$$

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),$$
$$(4,5),(4,6)\}.$$

5) Data jednačina ekvivalentna je u definicionom području $D = R$ sa jednačinom

$$2^{2x} - 12.2^x + 32 = 0.$$

Smjenom $y = 2^x$ dobijamo jednačinu:

$$y^2 - 12y + 32 = 0$$

čija su rješenja

$$y_1 = 4, \; y_2 = 8$$

Dakle,

$$2^x = 2^2 \vee 2^x = 2^3,$$

odnosno,

$$x = 2 \vee x = 3.$$

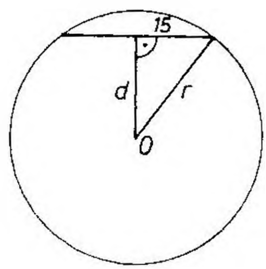
Rezultat: $x = 2, \quad x = 3$

6) Označimo sa d udaljenost tetive od središta kružnice, a sa r poluprečnik kružnice. Prema uslovima zadatka vrijedi

$$d = r - 9 \qquad (1)$$

Osim toga, prema Pitagorinom pravilu (Vidi sl. 57) imamo:

$$r^2 - d^2 = 15^2. \qquad (2)$$



Sl. 57.

Iz (1) i (2) slijedi

$$r^2 - (r-9)^2 = 225,$$

odnosno,

$$r^2 - r^2 + 18r - 81 = 225.$$

Dakle, $18r = 306$,

odnosno, $r = 17$

Rezultat: $r = 17$ cm.

7) Kvadratna jednačina $ax^2 + bx + c = 0$ ima rješenja $x_1 = x_2$ ako i samo ako je $D = b^2 - 4ac = 0$. Kako je diskriminanta D date kvadratne jednačine

$$D = (m-1)^2 - 36,$$

imamo:

$$(m-1)^2 - 36 = 0,$$

odnosno,

$$(m-7)(m+5) = 0.$$

Dakle,

$$m = 7 \vee m = -5.$$

1° Za $m = 7$ jednačina glasi

$$x^2 + 6x + 9 = 0,$$

odnosno,

$$(x + 3)^2 = 0.$$

Rješenja ove jednačine su:

$$x_1 = x_2 = -3.$$

2° Za $m = -5$ jednačina glasi

$$x^2 - 6x + 9 = 0,$$

odnosno,

$$(x - 3)^2 = 0.$$

Rješenja ove jednačine su

$$x_1 = x_2 = 3.$$

Rezultat:

$$m = -5, \ m = 7, \ \text{Za } m = -5, \ x_1 = x_2 = 3.$$

$$\text{Za } m = 7, \ x_1 = x_2 = -3$$

8) a) Definicija.

Ugao čije je tjeme u centru kruga, a kraci mu sadrže poluprečnike tog kruga naziva se centralni ugao kruga.

Ugao čije je tjeme na kružnici (periferiji kruga), a kraci mu sadrže tetive tog kruga, naziva se periferijski ugao kruga.

b) Teorema:

Periferijski ugao kruga jednak je polovini centralnog ugla nad istim kružnim lukom.

Ova teorema je posljedica tvrdnje da je spoljašnji ugao trougla jednak zbiru dva nenaporedna unutrašnja ugla trougla.

9) Označimo sa α dati ugao pravouglog trougla, tj. stavimo $\alpha = 30°$.

Tada je

$$\beta = 60°, \ \gamma = 90°.$$

Kako je u pravouglom trouglu

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

to imamo

$$a = c \cdot \sin\alpha = 5 \sin 30° = 5 \cdot \frac{1}{2},$$

$$b = c \cdot \cos\alpha = 5 \cos 30° = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Površina P tog trougla je

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{25}{8}\sqrt{3}.$$

Rezultat:

Uglovi trougla su $30°$, $60°$, $90°$

Stranice trougla: $\frac{5}{2}$ cm, $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm, 5 cm

Površina trougla: $\frac{25}{8}\sqrt{3}$ cm^2

10) Definiciono područje D date jednačine je

$$D = \{x \in R: 2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \ (k \in Z)\} = \{x \in R: x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4} \ (k \in Z)\}$$

Data jednačina ekvivalentna je sa jednačinom

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

čija su rješenja

$$2x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in Z),$$

odnosno,

$$x = (6k+1)\frac{\pi}{12} \quad k (\in Z).$$

Kako je $(6k+1)\frac{\pi}{12} \in D$ (za svako $k \in Z$), to su

$$x = (6k+1)\frac{\pi}{12} \quad (k \in Z)$$

sva rješenja date jednačine.

Rezultat:

$$x = (6k+1)\frac{\pi}{12} \quad (k \in Z).$$

V DIO

TEST PITANJA I ZADACI SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKOM FAKULTETU U ZENICI

TEST PITANJA I ZADACI NA KVALIFIKACIONOM ISPITU ODRŽANOM 28. 6. 1983. godine

I — Test pitanja:

Zaokruži slovo ispred tačnog odgovora

1) Tačna vrijednost izraza:

$$\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right):1\frac{1}{9}-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{15}\right) \quad \text{je:}$$

a) 1 b) $\frac{1}{10}$ c) 0 d) $\frac{5}{9}$.

2) Vrijednost izraza $\log_2 64$ je:

a) $\frac{1}{6}$ b) 6 c) 64^2 d) 32.

3) Obrazac $A = \frac{a \cdot b}{2}$ možemo interpretirati kao:

a) Obrazac za površinu deltoida sa okomitim dijagonalama (. . . . .)
b) obrazac za aritmetičku sredinu (. . . . .)
c) obrazac za geometrijsku sredinu (. . . . . ,)
U zagradi tačnog odgovora upisati šta su tada A, a, b.

4) Izraz $\frac{1}{x}$ je veći od $\frac{1}{x+1}$ ako je

a) $x > 0$ b) $x < -1$ c) $x > 0$ i $x < -1$ d) $x > 1$.

5) Ako je $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ i $0 < \alpha < 90°$, onda je:

a) $\cos 2\alpha = \frac{4}{5}$ b) $\cos 2\alpha = \frac{23}{25}$ c) $\cos 2\alpha = \frac{8}{25}$ d) $\cos 2\alpha = \frac{8}{5}$

6) Dati su stožac (kupa) visine $h = 8$ cm, radijusa baze $r = 4$ cm i lopta radijusa $R = 3$ cm. Koja je tvrdnja tačna:

a) lopta ima veću površinu nego stožac?

b) lopta se može upisati u stožac?

c) stožac ima manji volumen (zapreminu) od lopte?

II Zadaci:

1) Odrediti rastojanje između presječnih tačaka elipse $3x^2 + y^2 = 28$ i prave $5x + y - 14 = 0$.

2) Zbir dvaju brojeva je za 2 veći od polovine većeg od njih, a razlika njihova je za 1 manja od polovine manjeg.

Koji su to brojevi?

3) Riješiti jednačinu

$$\log(x + 5) - \log(2x - 3) = 2 \log 2.$$

4) Odrediti m tako da parabola $y = 4mx^2 + 3x + 6$ ne presijeca x-osu.

Odgovori i rješenja

I Odgovori na test pitanja:

1) Tačan je odgovor pod a) jer:

$$\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) : 1\frac{1}{9} - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{5} - \frac{4}{15}\right) = \frac{11}{9} \cdot \frac{9}{10} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{15} =$$

$$= \frac{11}{10} - \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

2) Tačan je odgovor pod b) jer je

$\log_2 64 = 6$ (po definiciji logaritma).

3) Tačan je odgovor pod a)

(A je površina deltoida, a i b su dužine dijagonala deltoida).

4) Tačan je odgovor pod c) jer:

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

i

$(-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \subset D = R \setminus \{-1, 0\}$, gdje smo sa D označili definiciono područje date nejednačine.

5) Tačan je odgovor pod b) jer:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}.$$

6) Ni jedna tvrdnja nije tačna.

II Rješenja zadataka:

1) Koordinate presječnih tačaka M_1 i M_2 elipse

$$3x^2 + y^2 = 28$$

i prave

$$5x + y - 14 = 0$$

su rješenja sistema jednačina:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + y^2 &= 28 \\ 5x + y &= 14. \end{aligned}\right\} \quad (S)$$

Zamjena

$$y = 14 - 5x \quad (*)$$

u prvu jednačinu sistema (S) daje

$$28x^2 - 140x + 168 = 0,$$

odnosno,

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Rješenja posljednje jednačine su $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$, pa zamjena u $(*)$ respektivno daje $y_1 = 4$ i $y_2 = -1$.

Prema tome su presječne tačke $M_1\,(2, 4)$ i $M_2\,(3, -1)$. Prema poznatoj formuli za udaljenost d dviju tačaka $M_1\,(x_1, y_1)$, $M_2\,(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

dobijamo

$$d = \sqrt{26}.$$

Rezultat: $\sqrt{26}$

2) Označimo li prvi broj sa x, a drugi sa $x + a$ $(a > 0)$, tada prema uslovima zadatka vrijedi

$$x + x + a = 2 + \frac{1}{2} \cdot (x + a) \tag{1}$$

$$x - (x + a) = \frac{1}{2}\, x - 1. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobivamo sistem jednačina:

$$\left.\begin{aligned} 3x + a &= 4 \\ x + 2a &= 2 \end{aligned}\right\} \quad (S)$$

čije je rješenje

$$x = \frac{6}{5}, \quad a = \frac{2}{5}.$$

Prema tome su

$$x = \frac{6}{5}, \quad x + a = \frac{8}{5}$$

traženi brojevi.

Rezultat: $$\frac{6}{5}, \quad \frac{8}{5}$$

3) Definiciono područje D date jednačine je

$$D = \{x \in R: x + 5 > 0 \wedge 2x - 3 > 0\} = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Data jednačina je u D ekvivalentna sa jednačinom

$$\log \frac{x + 5}{2x - 3} = \log 4.$$

Iz posljednje jednačine slijedi

$$\frac{x + 5}{2x - 3} = 4,$$

odnosno, $x = \frac{17}{7}$. Kako $\frac{17}{7} \in D$, to je $x = \frac{17}{7}$ rješenje date jednačine.

4) Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ne presijeca x-osu ako i samo ako je $D < 0$.

Prema tome je broj m rješenje nejednačine:

$$9 - 16\,m \cdot 6 < 0,$$

odnosno, nejednačine

$$3 - 32\,m < 0.$$

Dakle,

$$m > \frac{3}{32}.$$

Rezultat:

$$m > \frac{3}{32}$$

TEST PITANJA I ZADACI NA KVALIFIKACIONOM ISPITU ODRŽANOM 1. 9. 1983. godine

I. Test pitanja:

Zaokruži slovo ispred tačnog odgovora.

1) Tačna vrijednost izraza

$$\frac{0{,}1 : 0{,}02^2}{0{,}1 \cdot 0{,}02}$$

je:

a) 0,02 b) 1250 c) 2 d) 125000

2) Ako je $x \neq 1$, onda je vrijednost izraza

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

jednaka:

a) $\frac{1}{2x}$ b) $\frac{x-1}{x+1}$ c) $-2x$ d) $\frac{x+1}{x-1}$

3) Izraz $\frac{x}{x-1}$ je manji od 1 ako je:

a) $x < 1$ b) $x > 1$ c) $x < 0$ d) $x > 0$.

4) Jednakost $\log N = n$ ekvivalentna je sa:

a) $n^{10} = N$ b) $10^n = N$ c) $10^N = n$ d) $N^n = 10$.

5) Ako je $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ i $0 < \alpha < 90°$, onda je

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$ b) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ c) $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

6) Jednačina $x^2 - kx + k - 1 = 0$ ima samo jedno rješenje ako k ima vrijednost

a) 2 b) 0 c) 1 d) -1.

II. ZADACI:

1) Aritmetička sredina brojeva a, b, c, d je 25, a aritmetička sredina brojeva a, b, c je 22. Odrediti d.

2) Riješiti jednačinu:

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) Riješiti sistem jednačina:

$$y = 2x-3$$
$$4y-3x = 8.$$

4) Izračunaj zapreminu i površinu kocke čija je ivica

$$a = 2\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

Odgovori i rješenja

I. Odgovori na test pitanja:

1) Tačan je odgovor pod d) jer je

$$\frac{0{,}1 : 0{,}02^2}{0{,}1 \cdot 0{,}02} = \frac{\frac{1}{10} : \frac{1}{50^2}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{50}} = \frac{\frac{50^2}{10}}{\frac{1}{10 \cdot 50}} = 50^3 = 125000.$$

2) Tačan je odgovor pod *d*) jer je

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1} \qquad (x \neq 1).$$

3) Tačan je odgovor pod a) jer je

$$\frac{x}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

i $\{x \in R : x < 1\} \subset D = R \setminus \{1\}$ gdje smo sa D označili definiciono područje date nejednačine.

4) Tačan je odgovor pod b) jer

$$\log N = n \Leftrightarrow 10^n = N$$

po definiciji logaritma.

5) Tačan je odgovor pod c) jer je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

6) Tačan je odgovor pod a) jer je diskriminanta D kvadratne funkcije $y = x^2-kx+k-1$ jednaka

$$D = k^2-4(k-1) = k^2-4k+4 = (k-2)^2$$
$$D = 0 \Leftrightarrow k = 2.$$

II. Rješenja zadataka:

1) Prema uslovima zadatka vrijedi

$$\frac{a+b+c+d}{4}=25$$

$$\frac{a+b+c}{3}=22.$$

Otuda

$$a+b+c+d=100$$

$$a+b+c=66$$

pa je

$$d=100-(a+b+c)=100-66=34.$$

Rezultat: $d=34$

Napomena: Izraz $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ $(a_i \in R,\ i=1,2,\ldots,n)$

nazivamo aritmetičkom sredinom brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2) Definiciono područje D date jednačine je $D=R$. Sva rješenja te jednačine data su sa

$$2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, \qquad 2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \qquad (k\in Z),$$

odnosno, sa

$$x=\frac{\pi}{6}+k\pi, \qquad x=\frac{\pi}{3}+k\pi \qquad (k\in Z).$$

Rezultat:

$$x=\frac{\pi}{6}+k\pi, \qquad x=\frac{\pi}{3}+k\pi \qquad (k\in Z)$$

3) Rješenje: $x=4,\ y=5$

4) $V=a^3=(2\sqrt{3})^3=24\sqrt{3}$

$P=6a^2=6(2\sqrt{3})^2=72$

Rezultat: $V=24\sqrt{3}\ \text{cm}^3$, $P=72\ \text{cm}^2$

TEST PITANJA I ZADACI NA KVALIFIKACIONOM ISPITU ODRŽANOM 12. 9. 1983. godine

I Test pitanja:

Zaokruži slovo ispred tačnog odgovora:

1) Tačna vrijednost izraza $\left(\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$ je

a) 3 b) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ c) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ d) 1.

2) Ako je $a \neq b$, onda je vrijednost izraza

$$\left(\frac{a+b}{b}+\frac{2b}{a-b}\right):\left(\frac{a+b}{b}-\frac{2a}{a+b}\right) \text{ jednaka:}$$

a) $\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{a+b}$ c) $\frac{a}{a-b}$ d) $\frac{b}{a+b}$.

3) Izraz $x^2 \cdot (x-2)$ je veći od nule ako je

a) $x > 0$ b) $x < 0$ c) $x > 2$ d) $x < 2$.

4) Rješenje jednačine $2^x = 4^{x+1}$ je

a) 2 b) -2 c) 1 d) -1.

5) Ako se skrati izraz $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$ dobije se

a) $\cos\alpha$ b) 1 c) $\sin\alpha$ d) $\operatorname{tg}\alpha$.

6) Jednačina $x^2 - k \cdot x + k - 1 = 0$ ima samo jedno rješenje ako k ima vrijednost

a) 2 b) 0 c) 1 d) -1.

II ZADACI:

1) Ako neki pješak prelazi prosječno $4\frac{1}{2}$ km na čas, za koje će vrijeme preći 0,7 km?

2) Riješiti jednačinu:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) Riješiti jednačinu:

$$\log x - \log 2 = \log(2x + 3).$$

4) Izračunati površinu jednakostraničnog trougla ako mu je stranica $2\sqrt{3}$ cm.

Odgovori i rješenja

I Odgovori na test pitanja:

1) Tačan je odgovor pod d) jer je:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{3}{3}=1.$$

2) Tačan jde ogovor pod a) jer je

$$\left(\frac{a+b}{b}+\frac{2b}{a-b}\right):\left(\frac{a+b}{b}-\frac{2a}{a+b}\right)=\frac{a^2-b^2+2b^2}{b(a-b)}:$$

$$:\frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{b(a+b)}=\frac{a^2+b^2}{b(a-b)}\cdot\frac{b(a+b)}{a^2+b^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

3) Tačan je odgovor pod c) jer je

$$x^2(x-2)>0 \Leftrightarrow x>2.$$

4) Tačan je odgovor pod b) jer je

$$2^x=4^{x+1} \Leftrightarrow 2^x=2^{2x+2} \Leftrightarrow x=2x+2 \Leftrightarrow x=-2$$

i $x=-2 \in D=R$, gdje smo sa D označili definiciono područje date jednačine.

5) Tačan je odgovor pod c) jer je

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\sin\alpha.$$

Napomena: Izraz $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$ se smije skratiti za sve vrijednosti $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$.

6) Tačan je odgovor pod a)

(Vidi test pitanje 6) na kvalifikacionom ispitu održanom 1. 9. 1983. godine)

II. RJEŠENJA ZADATAKA:

1) Ako neki pješak prelazi 4500 m na sat, a 700 m za x minuta, tada iz proporcije

$$4500:60=700:x$$

dobijamo

$$x=\frac{28}{3}.$$

Rezultat: $\frac{28}{3}$ minuta.

2) Definiciono područje date jednačine je $D=R$.

Sva rješenja te jednačine data su sa

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi, \qquad \frac{x}{2}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \qquad (k \in Z),$$

odnosno, sa

$$x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \qquad x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \qquad (k \in Z).$$

Rezultat:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \qquad x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \qquad (k \in Z)$$

3) Definiciono područje D date jednačine je

$D = \{x \in R \colon x > 0 \wedge 2x + 3 > 0\} = (0, +\infty).$

Data jednačina je ekvivalentna u D sa jednačinom

$$\log \frac{x}{2} = \log (2x + 3).$$

Iz posljednje jednačine slijedi

$$\frac{x}{2} = 2x + 3,$$

odnosno,

$x = -2$. Kako $-2 \notin D$, to data jednačina nema rješenja.

Rezultat: Jednačina nema rješenja.

4) Kako je površina P jednakostraničnog trougla stranice a date formulom

$$P = \frac{a^2}{4} \sqrt{3},$$

to za $a = 2\sqrt{3}$

dobivamo $\quad P = 3\sqrt{3}.$

Rezultat: $\quad 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

TEST PITANJA I ZADACI NA KVALIFIKACIONOM ISPITU ODRŽANOM 30. 9. 1983. godine

I. Test pitanja:

Zaokruži slovo ispred tačnog odgovora:

1) Tačna vrijednost izraza

$$\left(\frac{3}{2} - 0{,}25\right) : \left(1\frac{1}{4} - 0{,}125\right) \text{ je}$$

a) $\frac{10}{9}$ b) $\frac{7}{8}$ c) 8 d) 1.

2) Ako je $x \neq \pm 1$, onda je vrijednost izraza

$$\frac{4x^2 + 8x + 4}{2x^2 - 2}$$

jednaka:

a) $8x$ b) $\frac{2(x+1)}{x-1}$ c) $\frac{2(x-1)}{x+1}$ d) $2x^2 + 8x - 2$.

3) Vrijednost izraza $\log_2 32$ je:

a) 5 b) $\frac{1}{5}$ c) 32^2 d) 16.

4) Rješenje jednačine

$3^{-x} = 9^{x+1}$ je

a) $x = 3$ b) $x = -\frac{1}{3}$ c) $x = -\frac{2}{3}$ d) $x = \frac{3}{2}$

5) Ako je $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i $0 < \alpha < 90°$, onda je $\cos\alpha$ jednako

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{4}{5}$.

6) Tjeme parabole $y = x^2 - 8x + q$ nalazi se na x-osi ako q ima vrijednost

a) 8 b) 16 c) 4 d) -4.

II. ZADACI:

1) Riješiti nejednačinu:

$$x^2 - 5x - 14 < 0.$$

2) Riješiti jednačinu:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) Riješiti jednačinu:

$$\log x - \log 2 = \log(2x + 3).$$

4) Naći površinu jednakostraničnog trougla čija je visina $h = 4\sqrt{3}$ cm.

Odgovori i rješenja

I Odgovori na test pitanja;

1) Tačan je odgovor pod a) jer je

$$\left(\frac{3}{2}-0{,}25\right):\left(1\frac{1}{4}-0{,}125\right)=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{4}:\frac{9}{8}=\frac{10}{9}.$$

2) Tačan je odgovor pod b) jer je

$$\frac{4x^2+8x+4}{2x^2-2}=\frac{4(x^2+2x+1)}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}\qquad(x\neq\pm 1).$$

3) Tačan je odgovor pod a) jer je

$\log_2 32=5$ (po definiciji logaritma).

4) Tačan je odgovor pod c) jer je

$$3^{-x}=9^{x+1}\Leftrightarrow 3^{-x}=3^{2x+2}\Leftrightarrow -x=2x+2\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$$

i $x=-\dfrac{2}{3}\in D=R$, gdje smo sa D označili definiciono područje date jednačine.

5) Tačan je odgovor pod d) jer je

$$\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}.$$

(Pred korijenom je znak „+" zbog toga što je $0<\alpha<90°$)

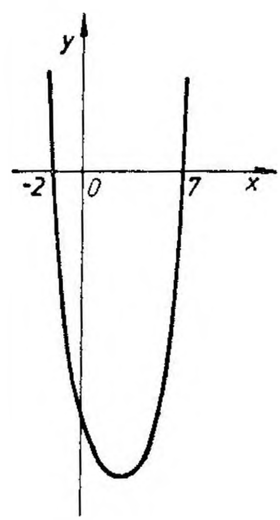
6) Tačan odgovor je pod b) jer je

$$y=(x-4)^2+16-q$$

pa tjeme parabole ima koordinate $x_T=4$, $y_T=16-q$ i $y_T=0$ za $q=16$.

II Rješenja zadataka

1) Grafik funkcije $y=x^2-5x-14$ je parabola koja siječe x — osu u tačkama $x_1=-2$ i $x_2=7$. Kako je $a=1>0$ funkcija ima minimum (parabola je „okrenuta na gore") pa je skica grafika kao na slici 58.



Sl. 58.

Skup rješenja date nejednačine je interval $(-2, 7)$.

Rezultat: $x\in(-2, 7)$

2) Vidi zadatak 2) na kvalifikacionom ispitu održanom 12. 9. 1983. godine..

3) Vidi zadatak 3) na kvalifikacionom ispitu održanom 12. 9. 1983. godine

4) Kako je visina h jednakostraničnog trougla stranice a data formulom

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

to iz

$$4\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

slijedi

$$a = 8.$$

Otuda

$$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 16\sqrt{3}.$$

Rezultat: $16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

VI DIO

ZADACI ZA VJEŽBU

1. ALGEBRA

1.1. *Identične transformacije*

a) Transformisati slijedeće izraze:

1) $$\frac{a^2-1}{n^2+an}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\frac{a-an^3-n^4-n}{1-a^2}\qquad (n\neq 0,1,\ a\neq\pm 1,-n)$$

$\left(\text{Rezultat: } \frac{n^2+n+1}{n}\right)$

2) $$\frac{2}{3}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]$$

(Uputstvo: $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=[(x^2+1)+x]\cdot[(x^2+1)-x]=(x^2+1)^2-x^2=x^4+x^2+1$

Rezultat: $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$)

3) $$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left[1-\frac{1-(a^2-x^2)}{2ax}\right]\qquad (a,x\neq 0,\ x\neq 1-a,\ -a)$$

Rezultat: $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$

4) $$\frac{\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\right]\cdot a^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}\qquad (a,\ b>0)$$

(Rezultat: $a-b$)

5) $$\frac{a}{2}\cdot\sqrt[4]{(a+1)(a^2-1)(1+2a+a^2)}\cdot\left(\frac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}\qquad (a>1)$$

$\left(\text{Rezultat: } \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt[4]{(a-1)^3}}{a+2}\right)$

6) $\sqrt{\frac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}-9a^{-2}}}$ $(a>0)$.

(Uputstvo: „Oslobodi” se negativnih eksponenata. Date korijene transformiši u korijene jednakih eksponenata.

Rezultat:

$$\frac{1}{2}\sqrt[6]{a})$$

7) Racionalisati nazivnik izraza

i) $$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

ii) $$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$$

(Rezultat: i)

$$\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

ii) Uputstvo: Razlomak proširiti tako da se u nazivniku dobije razlika kubova.

Rezultat: $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$)

8) Racionalisati brojnik izraza

i) $$\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{5}$$

ii) $$\frac{7-2\cdot\sqrt{6}}{5}$$

(i) Uputstvo: Razlomak proširiti tako da se u brojniku dobije zbir kubova.

Rezultat: i)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$$

ii) $$\frac{5}{7+2\cdot\sqrt{6}}\Big)$$

9) Izračunati:

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot(\sqrt{6}+11)$$

Uputstvo: Racionališi nazivnike datih razlomaka.

Rezultat: -115)

10) Izračunati:

$$\left(\frac{1}{b-\sqrt{a}}+\frac{1}{b+\sqrt{a}}\right):\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-2}b^{-1}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-2}} \qquad (b\neq 0,\ \pm\sqrt{a},\ a>0)$$

(Rezultat: $\frac{2}{3}$)

11) Izračunati:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{1}{x^{1,5}-1} \qquad (0<x\neq 1)$$

(Uputstvo: $x^{\frac{3}{2}}-1=(x^{\frac{1}{2}})^3-1=(x^{\frac{1}{2}}-1)(x+x^{\frac{1}{2}}+1)$

Rezultat: $x-1$)

12) Izračunati:

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}+1}+\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\frac{2a^{\frac{1}{4}}-2}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+1} \qquad (a>0)$$

(Uputstvo: Svedi, najprije, na zajednički nazivnik prva dva razlomka. Iskoristi:

$$[(a^{\frac{1}{4}}+1)+a^{\frac{1}{8}}]\cdot[(a^{\frac{1}{4}}+1)-a^{\frac{1}{8}}]=(a^{\frac{1}{4}}+1)^2-a^{\frac{1}{4}} \quad \text{itd.}$$

Rezultat: $\frac{4}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}$)

13) Pokazati da vrijednost izraza

$$\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}-\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}, \quad \text{za } a>2$$

ne zavisi od a.

(Uputstvo: Dovedi zadani izraz na najjednostavniji mogući oblik. U tako transformisanom izrazu ne smije se javiti a!

Vrijednost izraza iznosi 1)

14) Ako je

$$a^2+b^2=(a+b-c)^2 \qquad (1),$$

tada vrijedi

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c} \tag{2}$$

(Rješenje: Iz (1) imamo:

$$\begin{aligned} a^2 &= (a+b-c)^2-b^2 \\ b^2 &= (a+b-c)^2-a^2 \end{aligned} \tag{1'}$$

Pokažimo da vrijedi jednakost (2).

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} \overset{(1')}{=} \frac{(a-c)^2+2b(a-c)+b^2-b^2+(a-c)^2}{(b-c)^2+2a(b-c)+a^2-a^2+(b-c)^2}=$$

$$=\frac{2(a-c)(a-c+b)}{2(b-c)(b-c+a)}=\frac{a-c}{b-c}\Bigg)$$

b) Izračunati vrijednost slijedećih izraza:

15) $$\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}-\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$$

(Rezultat: $\left.-\frac{12\sqrt{2}}{7}\right)$

16) $$\frac{1}{A} \text{ ako je } A=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}$$

(Rezulatt: $2(\sqrt{5}+\sqrt{3}))$

17) $$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]$$

ako je

$$x=\frac{1}{a-1} \qquad (a \neq 1)$$

(Uputstvo: U zadatku 3. izraz je transformisan u $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$. Za $x=\frac{1}{a-1}$ taj izraz prima vrijednost $\left.\frac{a^3}{2(a-1)}\right)$

18) $$\frac{xy-\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{y^2-1}}$$

ako je

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right), \quad y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right) \quad (a \geqslant 1,\ b \geqslant 1)$$

(Uputstvo: Izračunaj najprije: $\sqrt{x^2 - 1}$, $\sqrt{y^2 - 1}$, xy za date vrijednosti od x i y.

Dobićeš

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left|a - \frac{1}{a}\right|$$

$$\sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{2}\left|b - \frac{1}{b}\right|$$

Kako je $a \geq 1,\ b \geq 1$, to je

$$a - \frac{1}{a} \geq 0,\ b - \frac{1}{b} \geq 0,$$

pa je

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$$

$$\sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{b}\right)$$

Rezultat:

$$\left.\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2 + 1}\right)$$

19)
$$\frac{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a - bx}}{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a - bx}}$$

ako je

$$x = \frac{2\,am}{b\,(1 + m^2)}, \qquad |m| < 1, \qquad a > 0$$

(Napomena: Ne zaboravi da je

$$\sqrt[p]{a^{np}} = |a|^n,$$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{za } a \geq 0 \\ -a & \text{za } a < 0 \end{cases}$$

Rezultat:
$$\left.\frac{1}{m}\right)$$

20) $\left[a^{-\frac{3}{2}}\, b\,(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}\,(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3$

ako je

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

(Rezultat: 1)

21) $$a^2-ab+b^2$$

za

$$a=\frac{2}{\sqrt{3}-1},\quad b=\frac{2}{\sqrt{3}+1}.$$

(Uputstvo: Racionalisati nazivnike od a i b, pa zatim izračunati vrijednost zadanog izraza. Korisno je izraz napisati u obliku

$$(a+b)^2-3ab$$

Rezultat: 6)

22) $$\left[\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}+5b^{\frac{1}{2}}\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}\right)\right]:\left(2a+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)$$

ako je

$$a=54,\ b=6.$$

(Uputstvo: najprije uprosti dati izraz. Dobićeš

$$3\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Rezultat: 1)

23) Dokazati da je

i) $$\left(\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}}+\sqrt{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}}\right)\left(\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}}-\sqrt{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}}\right)=\frac{a-b}{\sqrt[3]{ab}}\ (a>0,\ b>0),$$

ii) $$\left(a+\sqrt[3]{3\sqrt{\frac{a^3-1}{9}+\frac{a-a^2}{3}}}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a-1}\right)=a^2-a+1\ (a>1)$$

1.2. *Kvadratna funkcija; kvadratna jednačina i nejednačina; sistem od jedne kvadratne i jedne linearne nejednačine.*

a) Nacrtati grafik funkcije:

1. $$y=x^2-3x+2$$

i) pomoću dobivenog grafika odrediti rašćenje i opadanje funkcije, ekstremnu vrijednost, znak i nule date funkcije.

ii) Riješiti nejednačinu

$$ii_1)\ y\geq 0$$

$$ii_2)\ y<0.$$

(Rezultat:

i) Funkcija u intervalu $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$ opada od $+\infty$ do $-\frac{1}{4}$, a u intervalu

$\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ raste od $-\frac{1}{4}$ do $+\infty$. Ima minimum $-\frac{1}{4}$, a postiže ga za $x=\frac{3}{2}$. Funkcija ima dvije nule 1 i 2. Prima pozitivne vrijednosti za $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$, a negativne za $x \in (1, 2)$.

ii)

$$\text{ii}_1)\ x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$$

$$\text{ii}_2)\ x \in (1, 2))$$

b) Dovesti na oblik $a(x-\alpha)^2 + \beta$ funkcije

2. $y = x^2-8x + 16$

3. $y = 2x^2-5x + 3$

4. $y = -2x^2 + x-5$

pa odatle zaključiti u kojoj tački parabola ima tjeme i kako glasi jednačina ose simetrije.

(Rezultat:

2) $(4,0)$, $x = 4$ 3) $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$, $x = \frac{5}{4}$ 4) $\left(\frac{1}{4}, \frac{-39}{8}\right)$, $x = \frac{1}{4}$

$y = (x-4)^2$ $y = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ $y = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{39}{8}$)

5) Data je funkcija $3x^2-5x+2$. Za koju vrijednost promjenljive x je vrijednost ove funkcije

i) nula ii) $\frac{2}{3}$ iii) dvaput veća od vrijednosti promjenljive x.

$\left(\text{Rezultat: i) } 1, \frac{2}{3} \text{ ii) } \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \text{ iii) } \frac{1}{3}, 2\right)$

6) Od žice dužine 24 cm napraviti pravougaonik tako da ima najveću površinu. Kolike su dimenzije tog pravougaonika?

(Rješenje: Pravougaonik obima 24 cm ima dužinu x, širinu $12-x$. Prema tome površina y je

$$y = x(12-x),$$

odnosno,

$$y = 12x-x^2.$$

Obzirom da je u toj funkciji $a = -1 < 0$

$$-\frac{b}{2a} = 6, \quad \frac{4ac-b^2}{4a} = 36$$

pravougaonik će imati najveću površinu

$$y = 36 \text{ za } x = 6.$$

Dimenzije pravougaonika su: 6; 6.)

7) Broj 14 rastaviti na dva sabirka tako da njihov proizvod bude najveći.

(Rješenje:

$$x + y = 14; \quad x = 7, \quad y = 7)$$

c) Riješiti sljedeće jednačine:

8) i) $2x(x-5) = x^2$ ii) $(x+1)^2 = (2x-1)(x-1)$

(Rješenje i) $x = 0$, $x = 10$ ii) $x = 0$, $x = 5$)

9) $$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} = 0.$$

(Rezultat:

$$x_1 = \frac{a(\sqrt{3}-3)}{2}, \quad x_2 = -\frac{a(\sqrt{3}+3)}{2} \qquad (a \neq 0)$$

10) $$\frac{x^2+1}{n^2x-2n} - \frac{1}{2-nx} = \frac{x}{n}.$$

(Rezultat:

$$x_1 = \frac{n+1}{n-1}, \quad x_2 = -1 \quad (n \neq 0{,}1))$$

11) $$1 - \frac{2a}{x-a} = \frac{b^2-a^2}{a^2+x^2-2ax}.$$

(Rezultat: $x_1 = 2a + b$, $x_2 = 2a - b$, $(b \neq \pm a)$)

12) $$\frac{x+x^2}{1-x^2} : \frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2} = \frac{ab}{(b-a)^2} \qquad (b > 2a, \quad a > 1)$$

(Rezultat:

$$x_1 = \frac{a}{b-a}, \quad x_2 = \frac{b}{a-b})$$

13) Ako se jedan broj pomnoži svojom četvrtinom, dobije se 25. Koji je to broj?

(Rezultat: 10; -10)

14) Put od 3000 km. pređe jedan avion za dva sata prije nego drugi, jer po satu prelazi 50 km. više. Kolike su im brzine?

(Uputstvo: Sjetimo se da je

$$s = v \cdot t,$$

gdje je s pređeni put, v brzina, t vrijeme.

Brzine aviona: x i $x-50$

Vrijeme za koje avion pređe put:

$$\frac{3\,000}{x} \quad \text{i} \quad \frac{3\,000}{x-50}.$$

Dakle,

$$\frac{3\,000}{x} + 2 = \frac{3\,000}{x-50},$$

odnosno, $x^2-50x-75000=0$.

Prema tome $x=300$ je brzina prvog aviona, a 250 drugog.)

15) Dva radnika završe neki posao zajedno za t dana. Prvi treba n dana više nego drugi. Za koje bi vrijeme završio svaki radnik ponaosob?

(Rješenje: Prvi radnik treba x dana, drugi $x-n$. U jednom danu završe $\frac{1}{x}$, odnosno, $\frac{1}{x-n}$ posla.

Dakle,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-n} = \frac{1}{t}$$

Rezultat:

$$x = \frac{n+2t}{2} \pm \frac{\sqrt{n^2+4t^2}}{2}.$$ Diskusija!)

16) Zbir kvadrata dva uzastopna cijela broja iznosi 265. Koji su to brojevi?

(Rezultat: $-11,\ -12$ i $11,\ 12$)

17) Pod kojim je uslovom jedno rješenje jednačine $x^2+ax+b=0$ jednako dvostrukom drugom rješenju? Navesti jedan poseban primjer. (Rezultat: Traženi uslov je $2a^2=9b$).

d) Kakva veza postoji između rješenja i koeficijenta kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$?

18) Napisati jednačinu čija su rješenja

i) $3,\ -10$

ii) $1+\sqrt{2},\quad 1-\sqrt{2}$ iii) $\frac{1}{10-\sqrt{72}}$ i $\frac{1}{10+6\sqrt{2}}$

(Rezultat: i) $x^2+7x-30=0$ ii) $x^2-2x-1=0$

iii) $28x^2 - 20x + 1 = 0$

19) U jednačini

$$\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = m$$

odrediti m tako da

i) se jednačina svodi na linearnu

ii) jednačina ima dvostruko rješenje.

(Rezultat: i) $m = \frac{5}{2}$ ii) $m = \pm 2$)

20) U jednačini

$$5x^2 - kx + 1 = 0$$

odrediti parametar k ako za rješenja jednačine x_1 i x_2 vrijedi relacija $x_1 - x_2 = 1$.

(Uputstvo: Iskoristiti Vijetove formule i

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1 x_2$$

Rezultat: $k = \pm 3\sqrt{5}$)

(*) Kada se kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$ u realnom području može rastaviti u proizvod $a(x - x_1)(x - x_2)$ u kome su x_1, x_2 nule toga trinoma?

21) Kvadratne trinome

$$3x^2 - 5x + 2 \quad \text{i} \quad 2x^2 - 5x + 3$$

i) napisati u obliku $a(x - x_1)(x - x_2)$

ii) skratiti (ako je moguće) razlomak

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 5x + 2}$$

(Rezultat: i) $3x^2 - 5x + 2 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (x - 1)$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (x - 1)$$

ii) Primijetimo da zadani razlomak nije definisan za nule polinoma u nazivniku, tj. za $\frac{2}{3}$, 1.

Imamo:

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 5x + 2} = \frac{(2x - 3)(x - 1)}{(3x - 2)(x - 1)} = \frac{2x - 3}{3x - 2}.$$

Razlomak smo skratili izrazom $x - 1$, što je moguće jer je $x \neq 1$, pa je $x - 1 \neq 0$)

22) U jednačini

$$(m-1)\,x^2 + (m-5)\,x-(m+2) = 0$$

odrediti m tako da je zbir kvadrata rješenja x_1 i x_2 manji od 3.

(Rješenje: U zadatku se traži da bude ispunjena nejednakost

$$x_1^2 + x_2^2 < 3.$$

Lijevu stranu gornje nejednakosti transformišimo ovako:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1\,x_2.$$

Kako je

$$x_1 + x_2 = -\frac{m-5}{m-1}$$

$$x_2 \cdot x_2 = -\frac{m+2}{m-1},$$

to je

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{(m-5)^2}{(m-1)^2} + \frac{2\,(m+2)}{m-1} = \frac{m^2 - 10\,m + 25 + 2\,m^2 + 2m - 4}{(m-1)^2} =$$

$$= \frac{3\,m^2 - 8\,m + 21}{(m-1)^2} < 3,$$

pa se naša nejednakost može napisati u obliku

$$\frac{3\,m^2 - 8\,m + 21}{(m-1)^2} < 3,$$

dakle,

$$-2m + 18 < 0,$$

tj.

$$m > 9$$

Rezultat: $m > 9$)

23) Odrediti znake rješenja ne rješavajući jednačine:

i) $2x^2-5x+1=0$

ii) $5x^2-3x-2=0.$

(Rješenje i) Ovdje je $D = 25-8 > 0$; prema tome jednačina ima realna rješenja.

Iz Vijetovih formula

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

dobivamo

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, \quad x_1 \cdot x_1 = \frac{1}{2}.$$

Kako je

$$x_1 \cdot x_2 > 0,$$

rješenja x_1 i x_2 imaju isti znak, a pošto je $x_1 + x_2 > 0$,

rješenja x_1 i x_2 su pozitivna.

ii) Data jednačina ima realna rješenja različitog znaka. Pozitivno rješenje ima veću apsolutnu vrijednost od negativnog.)

24) Za koju su vrijednost parametra k rješenja jednačine

$$x^2 - 4x + k - 2 = 0$$

i) realna

ii) konjugovano kompleksna

iii) različitog znaka

iv) pozitivna

(Rješenje: i) $k \leq 6$ ii) $k > 6$ iii) $k < 2$

iv) Napomena: Za kompleksne brojeve „pozitivan" i „negativan" nema smisla. Zbog toga k treba odrediti tako da vrijedi i) i $x_1 \cdot x_2 > 0$. Rješenje: $2 < k \leq 6$)

1.3. *Logaritmi. Logaritamske jednačine i nejednačine*

1) Odrediti logaritamsku bazu a tako da slijedeće jednakosti budu tačne:

i) $\log_a 16 = 4$ ii) $\log_a \frac{7}{9} = -2$ iii) $\log_a \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

(Rezultat:

i) $a = 2$ ii) $a = \frac{3}{\sqrt{7}}$ iii) $a = \frac{25}{4}$)

2) Treba odrediti numerus x ako je:

i) $\log_2 x = \frac{1}{3}$ ii) $\log_{10} x = -2$ iii) $\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2}$.

(Rezultat:

i) $x = \sqrt[3]{2}$ ii) $x = 10^{-2}$ iii) $x = \sqrt{3}$)

3) Primjeniti pravila za logaritme u slijedećim izrazima:

i) $\log 3a(3 + a)$, $(a > 0)$ ii) $\log \frac{ab - 2}{ab + 2}$, $(ab > 2)$ iii) $\log_5 \sqrt[3]{7^m}$

iv) $\log \frac{a - 1}{a + 1} \cdot \sqrt[5]{\frac{ab}{(a - b)^4}}$ $(a > b > 1)$

(Rezultat: i) $\log 3 + \log a + \log (3 + a)$

ii) $\log (ab-2) - \log (ab + 2)$

iii) $\frac{m}{3} \log_5 7$

iv) $\log (a - 1) - \log (a + 1) + \frac{1}{5} (\log a + \log b) - \frac{4}{5} \log (a - b)$.)

4) Odrediti definiciono područje D funkcije

$$f(x) = \log \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 4}$$

(Rezultat: $D = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$)

Podsjetimo se: Definiciono područje logaritamske funkcije $y = \log_a x$ je skup svih pozitivnih realnih brojeva.

Dakle,

$$D = \left\{x \in R: \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x - 4} > 0\right\}$$

Riješiti sljedeće logaritamske jednačine:

5) $\log (x + 9) + 2 \log (x-9) - 3 \log (x-3) = 0$

(Rješenje: Jednačina nema rješenja. Naime, data jednačina je ekvivalentna u intervalu $(9, + \infty)$ sa $\log (x + 9) (x-9)^2 = \log (x- 3)^3$,

odnosno,

$$-108\,x + 756 = 0.$$

Kako $x = 7 \notin (9, + \infty)$, to $x = 7$ nije rješenje date jednačine.)

6) $\log (2a + 3x) - \log (2x + a) = \log (6a + x) - \log (3x - a)$ $(a > 0)$

(Rezultat: $x = 2a$.)

7) $\log_x \sqrt{5} + \log_x (5x) - 2{,}25 = (\log_x \sqrt{5})^2$

(Rezultat: $\sqrt[5]{5}$, 5)

8) $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x$

(Rezultat: 0; 3)

9) $x^{2 \log^3 x - 1{,}5 \log x} = \sqrt{10}$

(Rješenje: Logaritmiranjem date jednačine po bazi 10 dobijamo

$$2 \log^4 x - 1{,}5 \log^2 x = \frac{1}{2},$$

odnosno,

$$2 (\log^2 x)^2 - 1{,}5 \log^2 x - \frac{1}{2} = 0.$$

Rješenje posljednje jednačine je

$$\log^2 x = 1,$$

dakle,

$$\log x = \pm 1,$$

odnosno,

$$x = 10^{-1}, \ x = 10)$$

10) Bez upotrebe tablica izračunati x ako je

i) $x = \sqrt{10^{2 + \frac{1}{2} \log 16}}$

ii) $x = 49^{1 - \log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$

(Rešenje: i) $\log x = \frac{1}{2} \log 10^{2 + \log 4} = \frac{1}{2} \cdot (2 + \log 4) = 1 + \log 2 = \log 20,$

dakle,
$$x = 20.$$

ii) prvi način: Stavimo

$$x = y + z, \ y = 49^{1 - \log_7 2}$$
$$z = 5^{-\log_5 4}$$

Imamo:

$$\log_7 y = (1 - \log_7 2) \log_7 7^2 = (2 - 2 \log_7 2) \log_7 7 = 2 - \log_7 4 = \log_7 7^2 -$$
$$- \log_7 4 = \log_7 \frac{49}{4}.$$

Dakle,

$$y = \frac{49}{4}.$$

$$z = 5^{\log_5 \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}.$$

Dakle,

$$x = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}.$$

Drugi način:

$$x = 7^{2 - 2 \log_7 2} + \frac{1}{5^{\log_5 4}} = \frac{7^2}{7^{\log_7 4}} + \frac{1}{4} = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{2}\Big)$$

Riješiti slijedeće logaritamske nejednačine:

11) i) $\log_5 (7x-10) < 2$

ii) $\log (x^2-8x+12)-\log 5 > 0$

(Rezultat: i) $x \in \left(\frac{10}{7}, 5\right)$ ii) $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$)

12) Za koje vrijednosti varijable x funkcija f ima veću vrijednost od funkcije g ako je,

$$f(x) = \log_{\frac{1}{10}} (x-3), \quad g(x) = \log_{\frac{1}{10}} (2x+3)$$

(Rezultat: $x > 3$)

1.4. *Eksponencijalne jednačine i nejednačine*

Riješiti slijedeće jednačine:

1) $$10^{\log(100x)} \; 10^{\log(10x)} + 10^{\log x} = 91.$$

(Rezultat: 1)

2) $$4^x - 7^{x-1} + 4^{x-2} = -4^{x+1} - 7^{x-1}$$

(Rezultat: 2)

3) $$a^{1-\operatorname{tg} x} = b^{-1+\operatorname{tg} x} \qquad (a < a,\ b \neq 1)$$

(Rješenje:

$$a^{1-\operatorname{tg} x} = \frac{1}{b^{1-\operatorname{tg} x}} \Leftrightarrow (ab)^{1-\operatorname{tg} x} = (ab)^0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z))$$

4) $$8^{\log x} + 2^{1-\log x} \cdot 16^{1+\log x} = 33$$

(Rezultat: $x = 1$)

5) $$a^{2\log x} - 2a^{1+\log x} + a^2 = 0 \qquad (a < a \neq 1)$$

(Rezultat: $x = 10$)

6) $$(9x+1)^{\log(9x+1)} = \left(0{,}9x + \frac{1}{10}\right)^4$$

(Uputstvo: Datu jednačinu napisati u obliku

$$(9x+1)^{\log(9x+1)-4} = 10^{-4}$$

Dalje se rješava logaritmiranjem posljednje jednačine po bazi 10.

Rezultat: $x = 11$)

7) $$\frac{4-\sqrt[3]{3^x}}{\sqrt[3]{3^x}} + \frac{\sqrt[3]{3^x}}{4-\sqrt[3]{3^x}} = \frac{10}{3}$$

(Rezultat: 0; 3)

8) $$\sqrt[3]{x^{\log x+1}} - 20\sqrt[6]{x^{\log(10x)}} + 100 = 0$$

(Uputstvo: Staviti $\sqrt[6]{x^{\log x+1}} = y$

Rezultat: $x = 10^{-3}$, $x = 10^{2}$)

9) $$2^{4\log x+2} - 17\cdot 2^{3\log x} + 17\cdot 2^{\log x} - 4 = 0$$

(Uputstvo: Staviti $2^{\log x} = y$

Rezultat: $x = 1$, $x = 100$, $x = 10^{-2}$)

10) Za koje vrijednosti x su vrijednosti funkcije

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x} \text{ manje od } 125?$$

(Rezultat: $x > -3$)

11) Za koje vrijednosti $x \in R$ funkcija $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-\frac{3}{2}x}$ ima veću vrijednost nego funkcija $g(x) = 8^{0,1x+2}$

(Rezultat: $x > \frac{80}{27}$)

12) Riješiti sljedeće nejednačine:

i) $\left(\frac{1}{121}\right)^{\frac{x}{2}} < 11^{-x^2}$

ii) $21\cdot 3^{x} + 100\cdot 5^{x} - 3^{x+4} < 0$

(Rezultat: i) $x \in (0, 1)$ ii) $x < -1$)

2. TRIGONOMETRIJA

1) Izračunati vrijednosti trigonometrijskih funkcija ugla od

a) 390°

b) 660°

c) 105°

(a) Uputstvo: $390^\circ = 360^\circ + 30^\circ$

Rezultat: $\sin 390^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\operatorname{ctg} 390^\circ = \sqrt{3}.$$

b) Rezultat: $\sin 660° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 660° = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 660° = -\sqrt{3}$,

$$\operatorname{ctg} 660° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) Rezultat: $\sin 105° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, $\cos 105° = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$

$$\operatorname{tg} 105° = -2-\sqrt{3},\ \operatorname{ctg} 105° = -2+\sqrt{3}).$$

2) Izračunati vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ugla α ako je

a) $\sin \alpha = \frac{1}{5}$, $\quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$, $\quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{40}{9}$, $\quad \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

(a) Rješenje:

$$\cos \alpha = +\sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2\sqrt{6}.$$

b) Rezultat:

$$\sin \alpha = \frac{15}{17},\ \operatorname{tg} \alpha = -\frac{15}{8},\ \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{8}{15}$$

c) Rezultat:

$$\sin \alpha = -\frac{40}{41},\ \cos \alpha = \frac{9}{41},\ \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{9}{40})$$

3) Izračunati vrijednosti trigonometrijskih funkcija uglova $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ ako je

$$\sin \alpha = \frac{3}{5},\quad \text{os}\, \beta = -\frac{5}{13},\ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ \beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

(Rezultat: $\sin(\alpha+\beta) = -\frac{63}{65}$, $\cos(\alpha+\beta) = \frac{16}{65}$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\frac{63}{16},\quad \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = -\frac{16}{63},\quad \sin(\alpha-\beta) = \frac{33}{65}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = -\frac{56}{65},\quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = -\frac{33}{56},\quad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = -\frac{56}{33}\Big)$$

4) Dokazati jednakost

$$\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3}\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = \sqrt{3}$$

(Upustvo: Iz $\operatorname{tg}(20^\circ + 40^\circ) = \dfrac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ}$ slijedi

$$\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ (1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ))$$

5) Dokazati da vrijedi jednakost

$$\sin\alpha\cos(\beta-\alpha) + \cos\alpha\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta$$

(Rješenje: Definiciono područje D date jednakosti je $D = R$.

Imamo:

$$\sin\alpha\cos(\beta-\alpha) + \cos\alpha\sin(\beta-\alpha) = \sin\alpha(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) + \cos\alpha(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) = \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha\sin\beta + \sin\beta\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta = \sin\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \sin\beta)$$

6) Dokazati da vrijede jednakosti

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$$

(Rješenje: Definiciono područje D datih jednakosti je $D = R$.

Imamo:

$$\underline{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)} = (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)\cdot(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha = \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha) = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \underline{\sin^2\alpha - \sin^2\beta} = 1 - \cos^2\alpha - (1-\cos^2\beta) = \underline{\cos^2\beta - \cos^2\alpha})$$

7) Dokazati da vrijedi jednakost

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$$

(Rješenje: $D = \{\alpha, \beta \in R:\ \alpha, \beta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\quad (k \in Z)\}$

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta} =$$

$$= \frac{(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)\cdot(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}\Bigg)$$

8) Dokazati da vrijedi jednakost

$$\cos^6\alpha - \sin^6\alpha = \cos 2\alpha\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)$$

(Rješenje: Definiciono područje D date jednakosti je $D = R$. Imamo:

$$\cos^6\alpha - \sin^6\alpha = (\cos^2\alpha)^3 - (\sin^2\alpha)^3 = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha +$$

$$+ \sin^4\alpha) = \cos 2\alpha\,[(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - \cos^2\alpha\sin^2\alpha] = \cos 2\alpha\,[1 -$$

$$- \frac{1}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2] = \cos 2\alpha\,(1 - \frac{1}{4}\cdot\sin^2 2\alpha).)$$

9) Dokazati identitet:

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha} + 1 = \operatorname{ctg}^4\alpha \qquad (\alpha \neq k\pi,\ k \in Z)$$

10) Dokazati identitet:

$2\cos(\cos^2\alpha)\cos(\sin^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin(\cos^2\alpha)\sin(\sin^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$
$\cos(\cos 2\alpha)$ $\qquad (\alpha \in R)$

(Rješenje: Definiciono područje D datog identiteta je $D = R$.

Imamo:

$$2\cos(\cos^2\alpha)\cos(\sin^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin(\cos^2\alpha)\sin(\sin^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= \sin 2\alpha\,[\cos(\cos^2\alpha)\cos(\sin^2\alpha) + \sin(\cos^2\alpha)\sin(\sin^2\alpha)] = \sin 2\alpha\cos(\cos^2\alpha -$$

$$- \sin^2\alpha) = \sin 2\alpha\cos(\cos 2\alpha).)$$

11) Svesti na najjednostavniji oblik izraze:

a) $\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$

b) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1$

c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$

(a) Rezultat: $\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z)$

b) Rješenje: Definiciono područje D datog izraza je $D = R$.

Imamo:

$$2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 = 2(\sin^6\alpha - \sin^4\alpha) + 2(\cos^6\alpha -$$
$$- \cos^4\alpha) - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + 1 = 2\sin^4\alpha(\sin^2\alpha - 1) + 2\cos^4\alpha(\cos^2\alpha - 1) -$$
$$- \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + 1 = -2\sin^4\alpha\cos^2\alpha - 2\cos^4\alpha\sin^2\alpha - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + 1 =$$
$$= -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + 1 = -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha -$$
$$- \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + 1 = -(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 + 1 = 0.$$

Drugi način:

Iskoristiti jednakosti

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) = \sin^4\alpha -$$
$$- \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

c) Rezultat: $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \quad (\alpha, \beta \neq k\frac{\pi}{2}, \alpha + \beta \neq k\pi,\ k \in Z))$

12) Pokazati da vrijednost izraza

$$\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha + b^2\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)}{a\operatorname{ctg}\alpha + b\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} - (a + b)\operatorname{tg}^2\alpha \qquad (a \neq b)(\alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in Z)$$

ne zavisi od a, b, α.

(Rješenje:

$$\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha + b^2\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)}{a\operatorname{ctg}\alpha + b\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} - (a + b)\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{a^2\operatorname{tg}\alpha - b^2\operatorname{tg}\alpha}{a\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - b\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} - (a + b)\operatorname{tg}^2\alpha =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)\operatorname{tg}^2\alpha}{a - b} - (a + b)\operatorname{tg}^2\alpha = (a + b)\operatorname{tg}^2\alpha - (a + b)\operatorname{tg}^2\alpha = 0.$$

Dati izraz jednak je konstanti 0, pa ne zavisi od a, b, α.)

13) Ako je

$$x = a\cdot\cos\alpha\sin^2\alpha + a\cdot\cos\alpha(2 - \sin^2\alpha) \qquad (a = \text{const.}),$$
$$y = a\sin^3\alpha + a\sin\alpha(2 - \sin^2\alpha)$$

pokazati da izraz

$$x^2 + y^2$$

ne zavisi od α.

(Uputstvo: x, y predstaviti u obliku

$$x = 2a\cos\alpha,\ y = 2a\sin\alpha$$

Rezultat:

$$x^2 + y^2 = 4a^2)$$

14) Prikazati u obliku proizvoda izraze

a) $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha$

b) $\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$

c) $1 - \sqrt{2}\cos\alpha + \cos 2\alpha$

a) Rješenje:

$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 2\sin 3\alpha\cos\alpha + 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha = 2\sin 3\alpha(\cos\alpha + \cos 3\alpha) = 4\sin 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha$$

b) Rješenje:

$$\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha = \cos\alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin 2\alpha\sin\alpha + \sin 2\alpha =$$

$$= 2\sin 2\alpha\left(\frac{1}{2} + \sin\alpha\right) = 2\sin 2\alpha\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\alpha\right) = 4\sin 2\alpha\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

c) Rezultat:

$$4\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right))$$

15) Ako je

$$\alpha = \beta + \gamma,$$

tada vrijedi jednakost

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Dokazati!

(Rješenje:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right) =$$

$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{4} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2})$$

16) Ako je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}, \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

tada vrijedi

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}.$$

Dokazati!

(Rješenje: Kako je

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{2\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\beta}}{1-2\sin^2\beta} = \cdots = \frac{3}{4},$$

to je

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 2\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{28}} = 1$$

Otuda:

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4})$$

17) Ako su α, β, γ uglovi trougla, tada vrijede jednakosti

a) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

b) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$

Dokazati!

(a) Rješenje:

$$\cos\gamma = \cos[180^\circ - (\alpha + \beta)] = -\cos(\alpha + \beta).$$

Otuda:

$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \qquad (J)$$

Kvadriranjem jednakosti (J) slijedi:

$$\cos^2\gamma = \sin^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta = (1-\cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + 2(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta)$$

Otuda:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

Odavde, na osnovu (*J*) slijedi

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

b) Rješenje:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}[180^\circ - (\beta + \gamma)] = -\operatorname{tg}(\beta + \gamma).$$

Otuda:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}.$$

Dakle,

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma,$$

odnosno,

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)$$

18) Ako za uglove trougla vrijedi $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \sin\gamma$, (*) tada je taj trougao pravougli.

Dokazati!

(Rješenje:

$$\text{Kako je } \alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \text{i}$$

$$\sin\alpha = \sin[\pi - (\beta + \gamma)] = \sin(\beta + \gamma),$$

$$\sin\beta = \sin[\pi - (\alpha + \gamma)] = \sin(\alpha + \gamma),$$

to iz relacije (*) slijedi

$$\sin(\beta + \gamma) + \sin(\alpha + \gamma) = \cos\alpha\sin\gamma + \cos\beta\sin\gamma,$$

odnosno,

$$\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\cos\gamma = 0 \text{ tj. } \cos\gamma = 0$$

Dakle,

$$\left.\gamma = \frac{\pi}{2}\right).$$

19) Dokazati da vrijede jednakosti

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}, \ \cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$$

gdje je $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ $\quad (\alpha \neq (2k + 1)\pi, \quad k \in Z)$

(Rješenje:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}\Bigg)$$

19) Riješiti trigonometrijske jednačine

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

(a) Rješenja: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

b) Rješenja: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

c) Rješenja: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in Z)$)

20) Riješiti jednačinu

$$\sin 6x = \sin 4x$$

(Uputstvo: $\sin 6x - \sin 4x = 2\sin x\cos 5x$

Rješenja: $x = k\pi$, $x = (2k+1)\frac{\pi}{10} \qquad (k \in Z)$)

21) Riješiti jednačinu

$$\sin 2x - \cos 3x = 0$$

(Uputstvo: Napisati jednačinu u obliku:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos 3x = 0$$

Rješenja jednačine:

$$x = (4k+1)\frac{\pi}{10}, \quad x = -(4k+1)\frac{\pi}{2} \qquad (k \in Z))$$

22) Riješiti jednačinu

$$\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$$

(Uputstvo: Napisati jednačinu u obliku

$$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0,$$

a zatim uvesti smjenu $\cos x = t$

Rješenja jednačine:

$$x = (2k + 1)\pi \qquad k \in Z)$$

23) Riješiti jednačinu

$$\sin x + \cos x = 1$$

(Uputstvo: Uvesti smjenu $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, tj.

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 - t^2}$$

Rješenja jednačine:

$$x = 2k\pi, \; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in Z)).$$

Neke primjene trigonometrije

1) Izračunati ugao γ trougla ako je $a = 8$, $b = 3$, $c = 7$.

(Uputstvo: Primjeniti kosinusnu teoremu.

Rezultat: $\gamma = \frac{\pi}{3}$)

2) Izračunati stranicu a trougla ako je

$$b = 15, \; c = 22, \; \alpha = 120^\circ$$

(Rezultat: $a = \sqrt{1039}$)

3) Izračunati uglove trougla ako je

$$\alpha : \beta = 1 : 2, \quad a : b = 1 : \sqrt{3}$$

(Uputstvo: Primjeniti sinusnu teoremu).

Rezultat: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$)

4) Stranice trougla zadovoljavaju uslov

$$\frac{a^2 - (b - c)^2}{bc} = 1$$

Odrediti ugao α.

(Uputstvo: Primjeniti kosinusnu teoremu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha$$

Rezultat: $\alpha = \frac{\pi}{3}$)

5) Ako za uglove trougla vrijedi

$$\sin \alpha = 2 \sin \beta \cos \gamma,$$

trougao je jednakokrak. Dokazati!

(Uputstvo: Primjeniti sinusnu i kosinusnu teoremu)

6) Neka je α ugao koji zatvaraju stranice a i b paralelograma. Dokazati da je njegova površina data sa

$$P = ab \cdot \sin \alpha.$$

7) Izračunati uglove, drugu dijagonalu i površinu paralelograma čije su stranice $a = 3$, $b = 5$ i jedna dijagonala $d_1 = 7$.

(Rezultat: Uglovi: 60°, 120°, $d_2 = \sqrt{19}$, $P = \frac{15\sqrt{3}}{2}$)

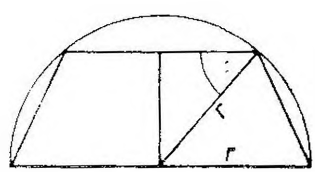
8) Ako je φ ugao između dijagonala d_1 i d_2 paralelograma, onda je njegova površina data sa

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi. \qquad \text{Dokazati!}$$

9) U polukrug radiusa r upisan je trapez (Slika 59.). Izraziti površinu P trapeza kao funkciju od α.

(Rezultat:

$P = r^2 (1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha$)



Sl. 59.

10) Ako je dužina manje osnove jednakokrakog trapeza a, a dužina njegovog kraka b, izraziti površinu trapeza kao funkciju njegovog ugla φ na osnovi.

(Rezultat:

$$P = b\,(a + b \cos \varphi) \sin \varphi)$$

11) Izračunati poluprečnik dviju kružnica koje se dodiruju izvana ako je d udaljenost njihovih središta, a φ ugao između njihovih vanjskih zajedničkih tangenata.

(Uputstvo:

$$r_1 + r_2 = d,\ r_1 - r_2 = d \sin \frac{\varphi}{2} \cdot (r_1 > r_2)$$

Rezultat:

$$r_1 = \frac{d}{2}\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right), \quad r_2 = \frac{d}{2}\left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg)$$

12) Ako su α, β, γ oštri uglovi, što ih prostorna dijagonala uspravnog pravouglog paralelepipeda zatvara s njegovim stranicama, tada vrijedi:

a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$

Dokazati!

13) Trougao stranice $a = 6$ i uglova $\beta = 45°$, $\gamma = 120°$ rotira oko stranice a. Odrediti volumen i površinu tako dobijenog rotacionog tijela.

(Uputstvo:

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi a, \quad P = r\pi(b + c)$$

gdje je $r = b \sin 60°$ (b, c — odrediti primjenom sinusne teoreme)

Rezultat:

$$V = 108(\sqrt{3} + 2)\pi \approx 1265$$

$$P = 18(3\sqrt{6} + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 6)\pi \approx 1622)$$

3. MATEMATIČKA LOGIKA I SKUPOVI

1) Odrediti istinitosne vrijednosti sudova:

a) $1 \in N$

b) $\frac{1}{2} \in Z$

c) $\sqrt{2} \in Q$

d) $5 + 2 = 3$

e) $\sqrt{(-2)^2} = 2$

f) $5 < 7$

(Rezultat:

a) $\tau(1 \in N) = \top$, b) $\tau\left(\frac{1}{2} \in Z\right) = \bot$, c) $\tau(\sqrt{2} \in Q) = \bot$, d) $\tau(5 +$

$+ 2 = 3) = \bot$, e) $\tau(\sqrt{(-2)^2} = 2) = \top$, f) $\tau(5 < 7) = \top$).

2) Odrediti istinitosne vrijednosti složenih sudova:

a) $(3 + 2 = 5) \wedge (5 + 2 = 4)$

b) $(7 + 3 = 10) \wedge (2 + 3 = 5)$

c) $\left(5 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 1\right) \vee (3 - 2 = 3)$

d) $(5 > 1) \Rightarrow (-3 > 2)$

e) $(2 < 3) \Leftrightarrow (3 < 5)$

Rezultat:

a) $\perp$ b) $\top$ c) $\top$ d) $\perp$ e) $\top$

3) Odrediti istinitosne vrijednosti sudova:

a) Zbir dviju stranica trougla je veći od treće.

b) Dijagonale paralelograma se polove.

c) Kvadrat je četvorougao

(Rezultat: a) $\top$ b) $\top$ c) $\top$)

4) Zadani su sudovi:

A = Broj 54 je djeljiv sa 3,

B = Zbir cifara broja 54 je broj koji je djeljiv sa 3.

Kako glasi ekvivalencija $A \Leftrightarrow B$?

(Rezultat: Broj 54 je djeljiv sa 3 ako i samo ako je zbir njegovih cifara djeljiv sa 3.

Ovu ekvivalenciju možemo izraziti i na ovaj način: Da bi broj 54 bio djeljiv sa 3, potrebno je i dovoljno da zbir njegovih cifara bude djeljiv sa 3.)

5) Zadani su sudovi:

A = Broj a je djeljiv sa 6.

B = Broj a je djeljiv sa 3.

Kako glasi implikacija $A \Rightarrow B$ i da li je istinita?

(Rezultat: Da bi broj a bio djeljiv sa 6, potrebno je da on bude djeljiv sa 3.

Implikacija je istinita.)

6) Pročitati:

a) $(\forall\, a, b \in R)\,(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

b) $(\exists\, a \in R)\,(a^2 = 4)$

Rezultat:

a) Za svaka dva realna broja a i b je $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

b) Postoji (bar jedan) realan broj a takav da je $a^2 = 4$.)

7) Napisati pomoću kvantifikatora:

a) Postoji prirodan broj x takav da vrijedi

$$2x + 3 = 7$$

b) Za svaki realan broj x vrijedi

$$3x + 2x = 5x$$

Rezultat:

a) $(\exists\, x \in N)\ (2x + 3 = 7)$

b) $(\forall\, x \in R)\ (3x + 2x = 5x)$

8) Koristeći simbole matematičke logike, napisati slijedeće:

a) Zbir dva prirodna broja je prirodan broj.

b) Kvadrat svakog prirodnog broja je prirodan broj.

c) Razlika dva prirodna broja je cio broj.

Rezultat:

a) $(\forall\, x, y)\ (x \in N \wedge y \in N \Rightarrow x + y \in N)$

b) $(\forall\, x)\ (x \in N \Rightarrow x^2 \in N)$

c) $(\forall\, x, y)\ (x \in N \wedge y \in N \Rightarrow x - y \in Z)$

9) Koristeći simbole matematičke logike, napisati slijedeće:

a) Za svake dvije tačke A i B postoji prava p koja ih sadrži.

b) Kroz svaku tačku A van date prave p može se povući prava q koja je paralelna sa pravom p.

Rezultat:

a) $(\forall\, A, B)\ (\exists\, p)\ (A \in p \wedge B \in p)$

b) $(\forall\, A \notin p)\ (\exists\, q)\ (q \parallel p \wedge A \in q)$

10) Neka je

$$A = \{2, 3, 5\}$$

$$B = \{-2, 3, 2, 4, 5\}$$

Nadite:

$$A \cup B,\ A \cap B,\ B \setminus A$$

Rezultat:

$A \cup B = \{-2, 3, 2, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2, 3, 5\}$, $B \setminus A = \{-2, 4\}$)

11) Nađite uniju triju skupova

$$A = \{x \in R: \ -5 < x \leqslant 3\}$$

$$B = \{x \in R: \ 0 \leqslant x \leqslant 11\}$$

$$C = \{x \in R: \ 14 < x \leqslant 15\}$$

Rezultat:

$$A \cup B \cup C = \{x \in R: \ -5 < x \leqslant 11 \lor 14 < x \leqslant 15\}$$

12) Nađite presjek skupova

$$\text{i)} \ A = \{x \in Q: \ x > 5\}$$

$$B = \{x \in N: \ x < 10\}$$

$$\text{ii)} \ A = \{x \in Q: \ x > 5\}$$

$$B = \{x \in Q: \ x < 10\}$$

(Rezultat: i) $A \cap B = \{6, 7, 8, 9\}$ ii) $A \cap B = \{x \in Q: \ 5 < x < 10\}$

13) Neka je

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Pokazati da je

a) $\{x \in A: \ x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$

b) $\{x \in A: \ x \geqslant 6\} \cap \{x \in A: \ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0\} = \{6, 7, 8, 9\}$

c) $\{x \in A: \ 3^x > 27\} \cup \{x \in A: \ x^2 - 4 = 0\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

14) Zadaci su skupovi

$$A = \{x \in Z: \ -6 \leqslant x \leqslant 10\}$$

i

$$B = \{y \in Z: \ -4 \leqslant y \leqslant 15\}$$

Nađi relaciju (napiši sve uređene parove koji joj pripadaju)

$$\mathcal{R} = \{(x, y): \ (x, y) \in A \times B \text{ i } y^2 = x\}$$

Rezultat:

$$\mathcal{R} = \{(9, -3), (4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3)\})$$

SADRŽAJ

PREDGOVOR

I DIO (KRATAK PREGLED TEORIJE) 7

1. *Aritmetika i algebra* 7
1.1. Operacije sa stepenima i korijenima 7
1.2. Formule za skraćeno množenje 8
1.3. Kvadratna jednačina. Kvadratna funkcija. Kvadratne nejednačine. 9
1.4. Eksponencijalne jednačine i nejednačine 10
1.5. Pravila za logaritme. Logaritamske jednačine i nejednačine. 11

2. *Planimetrija i stereometrija* 12
2.1. Planimetrija 12
2.2. Stereometrija 15

3. *Trigonometrija* 17
3.1. Mjerenje uglova 17
3.2. Trigonometrijska kružnica. Opšta definicija trigonometrijskih funkcija. 17
3.3. Trigonometrijske funkcije uglova pravouglog trougla 18
3.4. Vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih uglova 18
3.5. Trigonometriske funkcije suprotnog broja. 19
Periodičnost trigonometrijskih funkcija. 19
3.6. Adicione formule 19
3.7. Još neki trigonometrijski identiteti 19
3.8. Sinusna i kosinusna teorema. 20
Rješavanje kosouglog trougla. 21
3.9. Trigonometrijske jednačine 21

4. *Osnovi matematičke logike* 24
4.1. Pojam suda 24
4.2. Operacije sa sudovima 24
4.3. Kvantifikatori 25

5. *Skupovi* 26
5.1. Pojam skupa 26
5.2. Operacije sa skupovima 26

II DIO (ZADACI SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKOM FAKULTETU U SARAJEVU) 28

Zadaci na kvalifikacionom ispitu održanom 27. juna 1983. g. 28
Prva smjena 28
Druga smjena 33

Treća smjena 41
Četvrta smjena 45
Peta smjena 49
Zadaci na kvalifikacionom ispitu održanom 1. septembra 1983. g. 53
Prva smjena 53
Druga smjena 57
Treća smjena 60
Četvrta smjena 63

III DIO (ZADACI SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKOM FAKULTETU U BANJALUCI) 67

Zadaci sa kvalifikacionog ispita održanog 29. 6. 1983. g. 67
Zadaci sa kvalifikacionog ispita održanog 29. 8. 1983. g. 70
Zadaci sa kvalifikacionog ispita održanog 6. 9. 1983. g. 74

IV DIO (ZADACI SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKOM FAKULTETU U MOSTARU) 77

Zadaci sa kvalifikacionog ispita održanog 29. 6. 1983. g. 77
Zadaci sa kvalifikacionog ispita održanog 1. 9. 1983. g. 83
Zadaci sa kvalifikacionog ispita održanog 7. 9. 1983. g. 88

V DIO (TEST PITANJA I ZADACI SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKOM FAKULTETU U ZENICI) 93

Test pitanja i zadaci na kvalifikacionom ispitu održanom 28. 6. 1983. g. 93
Test pitanja i zadaci na kvalifikacionom ispitu održanom 1. 9. 1983. g. 97
Test pitanja i zadaci na kvalifikacionom ispitu održanom 12. 9. 1983. g. 99
Test pitanja i zadaci na kvalifikacionom ispitu održanom 30. 9. 1983. g. 102

VI DIO (ZADACI ZA VJEŽBU) 106

1. *Algebra* 106
1.1. Identične transformacije 106
1.2. Kvadratna funkcija; kvadratna jednačina i nejednačina; sistem od jedne kvadratne i jedne linearne nejednačine. 111
1.3. Logaritmi. Logaritamske jednačine i nejednačine. 117
1.4. Eksponencijalne jednačine i nejednačine 120

2. *Trigonometrija* 121
Neke primjene trigonometrije 130

3. *Matematička logika i skupovi* 132

Verica Tomašević — Slobodanka Mijatović

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE
SA KVALIFIKACIONIH ISPITA NA MAŠINSKIM
FAKULTETIMA

1984.

Izdavač

SOUR „Veselin Masleša", IRO „SARAJEVO", OOUR
Nastavne tehnologije, udžbenika i tiskanica
Sarajevo

Za izdavača
Anton Knol

Recenzenti
Dr Miloš Tomić i dr Mirjana Malenica

Crteži
Batrić Perazić

Lektor i korektor
Adila Rasavac

Tehnička oprema
Ahmed Muhamedagić

Štampa: ŠIRO „SRBIJA", Beograd

Tiraž 2.000 primjeraka